সূচী

II. Differentiation 55

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

এটা আমাদের plus two level সিরিজের দ্বিতীয় বই। প্রথম বইটা ছিল Permutation and Combination. সেটা যারা পড়েছ, তারা এই সিরিজের মূল কথাটা জানোই--

- Plus two level-এ খালি একটা বোর্ডের সিলেবাসের কথা মাথায় রাখলে চলে না। বিভিন্ন পরীক্ষা বিভিন্ন দিকে জোর দেয়। Competitive পরীক্ষার প্রশ্নগুলো মাঝে মাঝেই সব সিলেবাসের বেড়া পার করে দেয়, কী করে যে কষতে হবে বোঝাই যায় না। আমাদের plus two level সিরিজের বইগুলো পাঠ্যবিষয়ের এই বিশাল বিস্তারের কথা মাথায় রেখে লেখা। একেবারে গোড়ার ধারণাগুলো থেকে শুরু করে পাঁচ বছরের HS, JEE আর ISI-এর B.Stat/B.Math-এর প্রশ্নগুলো পর্যন্ত সম্পূর্ণ আলোচনা করা হয়েছে এখানে।

- অংক জিনিসটা ইংরাজিতে শেখাই ভালো। পরবর্তীকালে যে সব বই পড়তে হবে, সেগুলো তো সব ইংরাজিতেই লেখা। তাছাড়া যেসব competitive পরীক্ষায় বুঝিয়ে লিখতে হয়, বা interview-তে উত্তর দিতে হয়, তখনও ইংরাজিই ভরসা। কিন্তু তা বলে পাঠ্যবইয়ের যাবতীয় বোঝানোগুলোও যদি ইংরাজিতেই থাকে, তবে অধিকাংশ বাঙালী ছাত্রের পক্ষেই সেটা সহজ হয় না, তখন না বুঝে মুখস্থ করা ছাড়া পথ থাকে না। ইংরাজি আর অংকের এই দুস্তর ব্যবধানের উপর সেতুবন্ধনের জন্য এই বইতে বোঝানোগুলো সব বাংলায় রাখা হয়েছে, যদিও অংকগুলো সবই ইংরাজিতে।

ক্যালকুলাস বিষয়টার প্রয়োগ বিজ্ঞানে সর্বত্র। পরে যারা অংক নিয়ে পড়াশোনা করবে, তাদের জন্য তো বটেই, এমনকি engineering, physics, statistics ইত্যাদির ছাত্রদের জন্যও ক্যালকুলাসের মূল ধারণাগুলো অপরিহার্য। দুঃখের ব্যাপার এই যে, বাজারে প্রচলিত বইগুলোতে নানারকম অংকের খুঁটিনাটির ভীড়ে এই মূল ধারণাগুলো চাপা পড়ে যায়। অথচ এই ধারণাগুলোই বাস্তব প্রয়োগে তো বটেই, এমনকি competitive পরীক্ষাগুলোতেও বেশী কাজে লাগে। এই বইতে তাই সেইসব ধারণাগুলো আগে ছবির মাধ্যমে বুঝিয়ে নিয়ে ক্যালকুলাসকে ব্যবহার করা শেখানো হয়েছে। অংকের খুঁটিনাটিগুলোকে বোঝানো হয়েছে পরে।

পুরো বইটাকে Day 1, Day 2,... এইভাবে ভেঙে সাজানো আছে। একদিনের পড়া হিসেবে যতটা দিয়েছি, তার চেয়ে বেশী একদিনে করতে গেলে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। MCQ-এর জমানায় পরীক্ষায় গুছিয়ে অংক লেখার চাহিদা কমে গেছে। কিন্তু তাও অংক গুছিয়ে লিখতে পারাটা দরকারী। সেগুলো handwriting-এ লিখে দিয়েছি।

বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। কিন্তু কিছু ভুলচুক তাও ঢুকেই পড়ে। ভুল ত্রুটি যা চোখে পড়বে সেগুলো এই ওয়েবপেজে দিয়ে দেবার চেষ্টা করব--

http://www.isical.ac.in/∼arnabc/diffcal/

তোমাদেরও কিছু জানাবার থাকলে ওই পেজে লিখে দিতে পারবে। তাছাড়া যোগাযোগ করার জন্য arnabc74gmail.com বা 9231542600 ব্যবহার করতে পারো। তবে হ্যাঁ, আমি কিন্তু বাপু প্রাইভেটে পড়াই না। ওই অনুরোধ জানিয়ে ফোন করলে হতাশ হবে।

--অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
Function এবং graph

DAY 1
Function

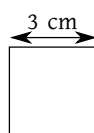
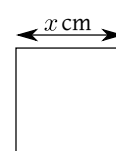
এই বইতে আমরা অংকের একটা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয় শিখব, যার নাম হল calculus (ক্যালকুলাস)। এত জায়গায় এর প্রয়োগ যে বলে শেষ করা মুস্কিল। Physics, chemistry, statistics, computer science, engineering, এমনকি biology-তেও এর নানান প্রয়োগ। আমাদের calculus শেখার যাত্রা শুরু হবে function (ফাংশন) বলে একটা জিনিস শেখা দিয়ে।
"ফাংশন" শব্দটা শুনলেই কেমন যেন বিভিন্ন সাংস্কৃতিক বিচিত্রানুষ্ঠানগুলোর কথা মনে পড়ে, স্কুলের ফাংশন, ক্লাবের ফাংশন, মাইক বাজিয়ে "আমাদের অনুষ্ঠান সাফল্যমণ্ডিত করুন"-বলা পাড়ার ফাংশন, এইসব। কিন্তু অংকের জগতে function মানে একেবারেই অন্য জিনিস, যেটা এবার আমরা ধাপে ধাপে শিখব।

1.1 প্রথম ধাপ--ফর্মুলা

Example 1: ধরো একটা square আছে Fig 1-এর মত, যার প্রতিটা বাহু 2 cm করে। তবে ওর area (ক্ষেত্রফল)

কত হবে? যদি বাহুগুলো 3 cm করে হত (Fig 2-এর মত), তবে? আর Fig 3-এর মত হলেই বা area কত হত?
SOLUTION: প্রথম ক্ষেত্রে উত্তর হল 2^2 cm$^2 = 4$ cm^2. দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উত্তর হবে 3^2 cm$^2 = 9$ cm^2. একইভাবে তৃতীয় ক্ষেত্রে পাবে x^2 cm^2. ■

তৃতীয় ক্ষেত্রে আমরা বাহুর দৈর্ঘ্যটা সংখ্যায় না দিয়ে একটা অক্ষর x ব্যবহার করে বুঝিয়েছি। তাই উত্তরটাও একটা সংখ্যা না হয়ে x-এর একটা ফর্মুলা হয়েছে। এর মধ্যে x-এর বিভিন্ন value বসিয়ে দিলেই তুমি বিভিন্ন সাইজের square-এর area পেয়ে যাবে। এইভাবে যখন x-এর মত কোনো অক্ষর ব্যবহার করা হয়, তাকে বলে একটা **variable.** আর তার কোনো ফর্মুলাকে বলে একটা **function,** যেমন এখানে x হল একটা variable, আর x^2 হল সেই x-এর একটা function.
সহজভাবে বললে, ভাবতে পারো যেন function মানে একটা ফর্মুলা যার মধ্যে x আছে, যেমন x^2 বা $2x+1$ বা $(x-34)^2$, এইরকম। যদি x-এর একটা value নাও, মানে ওর জায়গায় একটা সংখ্যা বসাও, তবে ফর্মুলাটার একটা value পাবে। একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 2: একটা function দিলাম $x-8$. যদি $x=5$ নিই, তবে function-টার value কত হবে?

SOLUTION: $x-8$-এ x-এর জায়গায় 5 বসালে হবে $5-8=-3$. তার মানে $x=5$-এ function-টার value হল -3. ■

Exercise 1: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে একটা করে function, আর x-এর একটা করে value দেওয়া আছে। তোমার কাজ হল x-এর সেই value-র জন্য function-টার value বার করা।

1. $x+8$ যখন $x=5$.
2. x^2-5x+6 যখন $x=1$.
3. x^2-5x+6 যখন $x=2$.
4. x^2-5x+6 যখন $x=3$.
5. $\frac{1}{x+3}$ যখন $x=5$.
6. x^3+3^x যখন $x=4$.
7. 2^x-x^2 যখন $x=3$.

■

1.2 দ্বিতীয় ধাপ--ফর্মুলার চেহারা

এতক্ষণ আমরা কোনো function লেখার সময়ে x নামের variable ব্যবহার করেছি বটে, কিন্তু ওর জায়গায় চাইলে তুমি অন্য কোনো নামের variable, যেমন t, y, q, z ইত্যাদি যা খুশি লিখতে পারো। উদাহরণস্বরূপ, $2t+1$ বা $(z-34)^2$, এইরকম ফর্মুলা। আমরা যদি x অক্ষরটা ব্যবহার করি, তবে ফর্মুলাটাকে বলব x-এর function. যেমন $2x+1$ হল x-এর একটা function. যদি লিখতাম $2y+1$, তবে সেটা হত y-এর function. বুঝতেই পারছ যে, $2x+1$ আর $2y+1$ এই দুটো ফর্মুলার চেহারা একই, খালি variable-টার নাম অন্য। তাই ওদেরকে আমরা একই function বলে থাকি। অর্থাৎ function বলতে ফর্মুলার চেহারাটাকেই বোঝায়। নীচের উদাহরণটা দেখলে বুঝবে এমনটা কেন করা হয়।

Example 3: আমরা যখন বলি x cm বাহু-ওয়ালা একটা square-এর area হল x^2 cm^2, তখন x নামটা গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়, আসল কথাটা হল বাহুর যা দৈর্ঘ্য সেটাকে square করতে হবে। যদি বাহুর দৈর্ঘ্যটাকে y cm বলতাম, তবে সেই একই জিনিস প্রকাশ করা যেত y^2 cm^2 দিয়ে। তাই x^2 আর y^2 আসলে একই "square-করা" function বোঝাচ্ছে। ■

Example 4: নীচে কয়েকটা ফর্মুলা দিলাম। এদের মধ্যে কারা আসলে একই function?

$$x^2, \quad 2t+5, \quad y^2, \quad 3-u, \quad 2z+5.$$

SOLUTION: এখানে x^2 আর y^2 একই function, খালি variable-এর নামের পার্থক্য। তেমনি $2t+5$ আর $2z+5$-ও আসলে একই। ■

Exercise 2: নীচে এক গুচ্ছ ফর্মুলা দিলাম। এদের মধ্যে কারা কারা আসলে একই function?

$$2x-1, \quad 4^x+3, \quad 2t-1, \quad t-t^2, \quad u-u^2.$$

■

সুতরাং শেখা গেল যে, function মানে আসলে ফর্মুলার চেহারাটা। একটা ফর্মুলার চেহারা আর variable-এর নাম, এই দুটো জিনিসকে আলাদা করে বোঝানোর জন্য আমরা একটা function লিখি এইরকমভাবে--

$$f(x).$$

এখানে ()-এর মধ্যে লেখা হয় variable-টা (এক্ষেত্রে x), আর f হল function-টার নাম। যেমন, $f(x) = 2x + 1$ হলে $f(y) = 2y + 1$. আবার $f(t) = 2t + 1$, এইরকম। এখানে f-এর বদলে অন্য কোনো অক্ষরও[1] লেখা যেত।
যদি $f(x)$-এর মধ্যে $x = 5$ বসাই, তবে যে value-টা পাব, তাকে বলব $f(5)$. একইভাবে $f(1)$ মানে হল $f(x)$-এর value যখন $x = 1$ হবে।

Example 5: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ হলে $f(1)$ কত হবে?

SOLUTION: $f(x)$-এর মধ্যে $x = 1$ বসিয়ে দিলে পাবে $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. ■

Exercise 3: $g(t) = (t + 1)^2$ হলে $g(4)$ কত হবে? ■

Exercise 4: $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ হলে $g(y)$ কী হবে? ■

এখানে $g(x)$ থেকে $g(y)$ বার করা মানে x-এর জায়গায় y বসিয়ে দেওয়া। একইভাবে $g(x + 1)$ মানে হল x-এর জায়গায় $x + 1$ বসানো। খালি এখানে মনে রেখো যে, $x + 1$-এর দু দিকে যেন ব্র্যাকেট থাকে। একটা উদাহরণ দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 6: ধরো $g(x) = 3x - 4$ তবে $g(x + 1)$ কত?

SOLUTION: উত্তর হল $g(x + 1) = 3(x + 1) - 4$. এখানে $x + 1$-কে ব্র্যাকেটের মধ্যে রাখতে হয়েছে। যদি ব্র্যাকেটটা না দিতাম, তবে হত $3x + 1 - 4 = 3x - 3$, যেটা মোটেই $g(x + 1)$-এর সমান নয়। ■

Exercise 5: যদি $f(t) = 3t^2 - 4t - \frac{1}{t}$ হয়, তবে $f(2t)$ কত হবে? ■

1.3 তৃতীয় ধাপ--ইনপুট থেকে আউটপুট পাওয়ার যন্ত্র

প্রথম ধাপে আমরা বলেছিলাম যে, function বলতে একটা ফর্মুলা বোঝায়। দ্বিতীয় ধাপে কথাটাকে আরেকটু সূক্ষ্ম করেছিলাম--function মানে খালি ফর্মুলাটা বোঝায় না, বোঝায় ফর্মুলার চেহারাটা। এইবার তৃতীয় ধাপে এসে ব্যাপারটাকে আরেকটু সূক্ষ্ম করব। এর জন্য আমরা একটা function-কে একটা যন্ত্র বলে ভাবব। একটা উদাহরণ দেখলে সুবিধা হবে।

Example 7: ধরো একটা function নিলাম $f(x) = x^2$. এখানে x-এর জায়গায় যাই value নাও, $f(x)$-এর একটা value পাবে। ঠিক যেন f একটা যন্ত্র, তার মধ্যে একটা সংখ্যা ঢুকিয়ে দিলে আরেকটা সংখ্যা বেরিয়ে আসে (Fig 4)। এখানে x-এর value-টা হল ইনপুট, আর $f(x)$-এর value-টা হল আউটপুট। ■

[1] তা বলে যেন আবার $x(x)$ লিখে বোসো না, কারণ তাহলে বেচারী x অক্ষরটার ডবল ডিউটি পড়বে। অংকের দুনিয়ায় কোনো অক্ষর দিয়ে এরকম ডবল ডিউটি করানো চলে না।

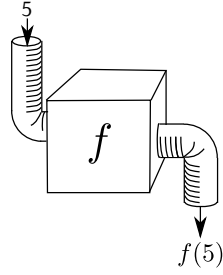
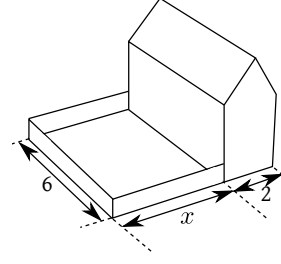



Fig 4 **Fig 5**

মনে করতে পারো যেন Fig 4-এর বাক্সটার ভিতরে f-এর ফর্মুলাটা ভরা আছে। কিন্তু বাক্সের ভিতরে ঠিক কী আছে তা নিয়ে আমাদের মাথাব্যথা নেই। আমাদের চিন্তা হল কোন ইনপুট দিলে কোন আউটপুট বেরোবে সেটা নিয়ে। একটা উদাহরণ নিলে বোঝা যাবে ব্যাপারটা।

Example 8: একটা বাড়ি আছে Fig 5-র মত। সামনে বাগান। মাপজোক যেমন দেখানো আছে, সেই অনুযায়ী বল তো মোট কতটা জমি লাগবে? (দৈর্ঘ্যগুলো সব মিটার এককে দেখানো হয়েছে)।

SOLUTION: এই অংকটা দুজনে দুভাবে করেছে। প্রথমজন দেখেছে যে, বাড়িটার জন্য দরকার $6 \times 2 = 12$ মিটার^2 জমি, আর বাগানটার জন্য দরকার $6x$ মিটার^2 জমি। সুতরাং মোট জমির পরিমাণের জন্য তার ফর্মুলাটা হয়েছে $12 + 6x$ মিটার^2। দ্বিতীয়জন বাড়ি আর বাগানকে আলাদা করে দেখে নি। সে দেখেছে যে পুরো জমিটা হল একটা rectangle (আয়তক্ষেত্র), যার এক দিক 6 মিটার লম্বা, আর অন্যদিক $x + 2$ মিটার। সুতরাং এদের গুণ করে সে পেয়েছে $6(x + 2)$ মিটার^2। এমনিতে দেখতে গেলে দুজনের ফর্মুলাদুটো আলাদা, কিন্তু x-এর যাই value নাও না কেন, দুটো ফর্মুলাই একই value দেবে। অর্থাৎ যদি x-এর value থেকে মোট জমির পরিমাণ বার করার জন্য একটা যন্ত্র বানাও, তবে সেই বাক্সের ভিতরে এই দুটো ফর্মুলার যেটা খুশি ভরতে পারো, আমাদের কোনো মাথাব্যথা নেই। তাই আমরা $f(x) = 6x+12$ এবং $g(x) = 6(x+2)$-কে একই function বলব। যেহেতু এরা x-এর প্রতিটা value-তেই একই value নেবে, তাই আমরা অনেক সময়ে লিখি $f \equiv g$.
■

Exercise 6: নীচে এক গুচ্ছ ফর্মুলা দিলাম। এদের মধ্যে কারা কারা আসলে একই function?

$$(x-1)^2, \quad 3^{2^x}, \quad 1-2t+t^2, \quad 9^x.$$

■

এখানে একটা ছোট্টো কথা বলে রাখি, যেটা শুনতে হয়তো মামূলী মনে হবে, কিন্তু আসলে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। কোনো function-কে যখন একটা যন্ত্র বলে ভাবছ, তখন মনে রেখো যে, কোনো একটা ইনপুট থেকে খালি একটাই আউটপুট বেরোতে পারে, অর্থাৎ আউটপুটটা খালি ইনপুটের উপরই নির্ভর করে, আর অন্য কোনো কিছুর উপরে নয়। একটা function-এর ফর্মুলা না জানলেও এটুকু অনেক সময়ে চোখে দেখেই বোঝা যায়। দুটো উদাহরণ নিলে সুবিধা হবে।

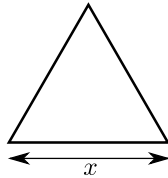
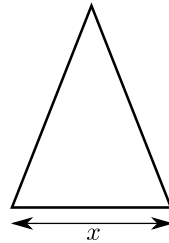



Fig 6 **Fig 7** **Fig 8**

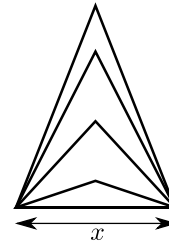
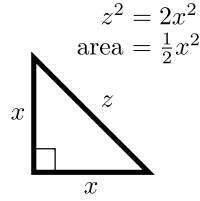



Fig 9

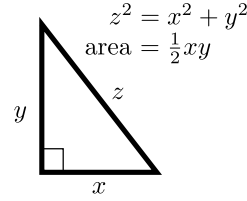



Fig 10

Example 9: ABC একটা equilateral (সমবাহু) ত্রিভুজ (Fig 6)। এর area (মানে, ক্ষেত্রফল) কি x-এর function হবে?

SOLUTION: হ্যাঁ, কারণ x জানলেই পুরো ত্রিভুজটা সম্পূর্ণভাবে পেয়ে যাচ্ছি (যেহেতু সবগুলো বাহুর দৈর্ঘ্যই x)। তাই area-ও বার করে ফেলা যাবে। ঠিক কীভাবে বার করা যাবে, সেটা এখানে প্রশ্ন নয়। আদৌ যে বার করা যাবে, এটা জানাই যথেষ্ট। ■

Example 10: যদি ত্রিভুজটা হত Fig 7-এর মত isoceles (সমদ্বিবাহু), তবে কী তার area-টা x-এর function হত?

SOLUTION: না, কারণ x জানলেই আমরা এক কথায় area-টা বার করে ফেলতে পারি না। একই x-ওয়ালা নানারকম isoceles ত্রিভুজ সম্ভব (Fig 8), যাদের area বিভিন্ন। ■

Exercise 7: Fig 9-এ একটা ত্রিভুজ রয়েছে। ওর area-টা যে x-এর একটা function সে তো লেখাই আছে। বলো তো, area-টা কি z-এরও একটা function হবে? মানে, যদি খালি z বলা থাকে, তা থেকেই কি তুমি area-টা বার করে দিতে পারবে? ■

Exercise 8: Fig 10-এর ত্রিভুজটার ক্ষেত্রে বলো তো area-টা z-এর একটা function হবে কিনা। ■

1.4 চতুর্থ ধাপ--শর্ত চাপানো

তুমি হয় তো জানো যে, কোনো সংখ্যাকে 0 দিয়ে ভাগ করা যায় না। কারণটা এইরকম--

> ভাগ হল গুণের উল্টো। সুতরাং $a = \frac{c}{b}$ হলে আমরা চাইব যেন $a \times b = c$ হয়। তাই যদি $\frac{1}{0} = a$ হত, তবে $0 \times a = 1$ হওয়া উচিত। কিন্তু সেটা তো আর হতে পারে না, কারণ 0 দিয়ে যে সংখ্যাই গুণ করো না কেন, উত্তর সর্বদা 0-ই হয়।

সুতরাং যদি $f(x) = \frac{1}{x}$ হয়, তবে $f(0)$ বার করা যাবে না। অংকের ভাষায় আমরা বলি $f(0)$ হল **undefined.** যন্ত্রের উপমা দিয়ে ভাবলে মনে করতে পারো যেন, ওই value-তে যন্ত্রটা বিগড়ে যাবে। অতএব আগেভাগেই যন্ত্রের গায় লেবেল সেঁটে দেওয়া ভালো "খবরদার, এই যন্ত্রে যেন বাপু ভুল করে $x = 0$ ঢুকিয়ে দিও না!"। অংকের ভাষায় সেটা করার কায়দা হল এইভাবে লেখা--

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ if } x \neq 0.$$

ওই যে শর্তটা লিখে দিলাম, ওতেই বলে দেওয়া হল যে, $x = 0$ হলে আমাদের function-এর value হবে undefined. এরকম শর্ত চাপানোর কারণ সব সময়েই যে শূন্য দিয়ে ভাগ করা হবে এমন নয়। আরেকটা সমস্যা হতে পারে negative

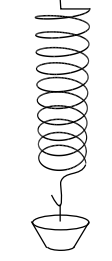



Fig 11

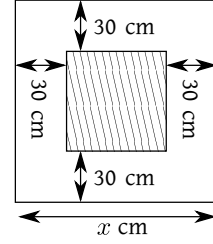



Fig 12

সংখ্যার square root বার করা নিয়ে। আমরা জানি যে, কোনো negative সংখ্যার square root বার করা যায় না (এ বইতে আমরা complex সংখ্যার প্রসঙ্গে যাব না)। এই নিয়েই এর পরের অংকটা।

Example 11: ধরো এই function-টা দিলাম, $f(x) = \sqrt{x-4}$. এখানে negative সংখ্যার square root বার করা এড়াতে কী শর্ত চাপাতে হবে?
SOLUTION: আমরা চাই যাতে $x - 4 \geq 0$ হয়, অর্থাৎ $x \geq 4$ লাগবে। ■

Exercise 9: নীচের প্রতিটা ক্ষেত্রে একটা করে function দেওয়া আছে। ওদের জন্য এমন শর্ত বার করো, যাতে ওরা undefined না হয়ে যায়।
(*i*) $\sqrt{4-x}$ (*ii*) $\sqrt{4-x^2}$ (*iii*) $\sqrt{(x-2)(x-3)}$
■

নীচে অন্যরকম একটা উদাহরণ দিলাম, যেখানে শূন্য দিয়ে ভাগ বা negative সংখ্যার square root বার করার ঝামেলা নেই।

Example 12: একটা স্প্রিং আছে Fig 11-এর মত। এর উপর দিকটা ছাদের সঙ্গে শক্ত করে আটকানো, আর নীচের প্রান্তে ওজন ঝোলানো যায়। যতই ওজন ঝোলাবে, ততই স্প্রিংটা লম্বা হয়ে ঝুলে পড়বে। ধরো জানা আছে যে, স্প্রিংটার প্রাথমিক দৈর্ঘ্য ছিল 10 cm, আর ওজনটা 1 kg করে বাড়ালে স্প্রিংটা 2 cm করে ঝুলে পড়ে। তার মানে 1 kg ওজনে দৈর্ঘ্যটা হবে $10 + 2$ cm, আবার 2 kg ঝোলালে হবে $10 + 2 \times 2$ cm, এরকম। সুতরাং w kg ওজনের বেলায় হবে $10 + 2w$ cm. তাহলে কী এটা বলা ঠিক হবে যে, w kg ওজনের জন্য দৈর্ঘ্যটা হবে $f(w)$ cm, যেখানে $f(w) = 10 + 2w$?
SOLUTION: না, কারণ এক সময়ের পরে নিশ্চয়ই স্প্রিংটা আর লম্বা না হয়ে স্রেফ পট্ করে ছিঁড়ে যাবে। আবার $w = -2$ বসানোরও কোনো মানে হয় না, কারণ ওজন আবার negative হয় কী করে? সুতরাং যদি স্প্রিংটা সর্বোচ্চ 100 kg ওজন নিতে পারে, তবে আমাদের লেখা উচিত

$$f(w) = 10 + 2w \text{ if } 0 \leq w \leq 100.$$

যদি এর বাইরে w-এর অন্য কোনো value কেউ দেয়, তবে আমরা এক কথায় জবাব দিয়ে দেব যে, সেখানে f-টা undefined, অর্থাৎ আমাদের function-টা ওইসব value-র জন্য নয়। ■

এবার নীচের অংকটা করো দেখি।

Exercise 10: একটা ঘর আছে তার মেঝে একটা square. তার ঠিক মাঝখানে একটা square কারপেট পাতা আছে, চারপাশে ঠিক 30 cm করে ছেড়ে। Fig 12 দ্যাখো। যদি ঘরটার প্রতিটা বাহু x cm করে হয়, তবে কারপেটের area

হবে $(x-60)^2$ cm^2. এখানে অবশ্যই $x \leq 0$ হতে পারে না, তাই একজন ছাত্র কারপেটের মোট area-টাকে লিখেছে $f(x)$ cm^2, যেখানে

$$f(x) = (x-60)^2 \text{ if } x > 0.$$

এই শর্তটায় একটা ভুল আছে। কী ভুল? ■

1.5 পঞ্চম ধাপ--একাধিক ফর্মুলা ব্যবহার করা

এবার আমরা দেখব কীভাবে একই function-এর মধ্যে একাধিক ফর্মুলা থাকতে পারে। একটা উদাহরণ নিয়ে শুরু করি।

Example 13: এক দেশের রাজা তাঁর রাজ্যের ব্যবসায়ীদের কাছ থেকে তাদের লাভের 20% খাজনা আদায় করেন।

মানে কোনো ব্যবসায়ীর লাভ যদি x টাকা হয়, তবে তাকে খাজনা হিসেবে দিতে হবে $0.2x$ টাকা। সুতরাং রাজামশায় তার কোষাগারের সিংদরোজায় এই function-টা লটকে রেখেছেন--

$$f(x) = 0.2x.$$

এইবার হয়েছে কি, একজন ব্যবসায়ীর সে বছর 100 টাকা লোকসান হয়েছে। তার মানে তার লাভ হল -100 টাকা। সে এবার রাজার কাছে কুর্নিশ করে বলছে, "মহারাজ, $f(-100) = -20$, তাই আমি আপনাকে -20 টাকা দেব, মানে আজ্ঞে আপনিই আমাকে 20 টাকা দেবেন, হেঁ, হেঁ!" রাজামশায়ের তো চক্ষুস্থির, তিনি তো এমনটা ভাবেন নি। লোকসান হলে অবশ্যই কোনো খাজনা দিতে হবে না, মানে সেক্ষেত্রে খাজনার পরিমাণ 0, কিন্তু সেটা তো $f(x)$-এর সংজ্ঞায় বলা নেই। তবে কি

$$f(x) = 0.2x \text{ if } x > 0$$

লিখলে ঠিক হত?

SOLUTION: না, হত না। কারণ ব্যবসাতে লাভ লোকসান দুইই হতে পারে, দুই ক্ষেত্রেই খাজনার বিধান থাকা প্রয়োজন। যদি এইভাবে খালি $x > 0$ শর্ত বসানো হয়, তবে লোকসানের বেলায় খাজনার পরিমাণ হয় undefined. কিন্তু আসলে সেটা হওয়া উচিত ছিল 0. তাই এভাবে লিখলে ঠিক হত--

$$f(x) = \begin{cases} 0.2x & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}.$$

অনেক সময়ে লোকে এইভাবেও লেখে--

$$f(x) = \begin{cases} 0.2x & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

■

লক্ষ করো এখানে আসলে দুটো ফর্মুলা আছে--একটা হল $0.2x$ আর অন্যটা হল 0. কোনটা কখন প্রযোজ্য সেটা প্রতিটা ফর্মুলার পাশে শর্ত লিখে বলা আছে।

যাই হোক, $f(x)$-টাকে এইভাবে ঠিক করে দেওয়ার পর বছর কয়েক বেশ শান্তিতে চলছিল। কিন্তু তারপর ব্যবসায়ীমহলে আবার ভারী শোরগোল-- "ছোটোবড়ো সব ব্যবসায়ীদের জন্যই খাজনার একই হার চলবে না"। ছোটো ছোটো ব্যবসায়ীদের লাভের পরিমাণ এমনিতেই কম, তার 20% বাদ দিলে সামান্যই পড়ে থাকে। রাজামশাই তাই বাধ্য হয়েই খাজনার নতুন নিয়ম করেছেন--যে সব ব্যবসায়ীর লাভের পরিমাণ 100000 টাকার কম, তাদের বেলায় খাজনার হার হবে 10% মাত্র। বাকিদের বেলায় আগের মত 20%-ই বহাল থাকবে। আর লোকসানের বেলায় অবশ্যই খাজনা মকুব।

Exercise 11: রাজামশায় দরাজ মানুষ বটেন, কিন্তু খাজনার এই নতুন নিয়মটা function-এর ভাষায় লিখতে ওনার মাথা গুলিয়ে যাচ্ছে। একটু সাহায্য করবে?

HINT: এখানে তিনটে ফর্মুলা আছে $0, 0.1x$ আর $0.2x$. এদেরকে উপযুক্ত শর্ত দিয়ে জুড়ে $f(x)$ বানাতে হবে। ■

এরকম বিভিন্ন ফর্মুলা জুড়ে জুড়ে একটা $f(x)$ বানানোর সময়ে দুটো ব্যাপারে সাবধান--

- এক, তোমার শর্তগুলোর আওতার বাইরে যেন x-এর কোনো value চলে না যায়। তাহলে সেইসব value-তে কিন্তু তোমার function-টা undefined হয়ে যাবে।
- দুই, x-এর কোনো value যেন একাধিক শর্তের আওতায় এসে না যায়, সেক্ষেত্রে কোন শর্তটা খাটবে সেটা বোঝা যাবে না।

কিছু অংক কষে এই দুটো সমস্যা ভালো করে বুঝে নেওয়া যাক।

Example 14: সেই রাজার রাজত্বে একটা পরীক্ষায় ছাত্ররা 0 থেকে 100 অব্ধি নম্বর পেতে পারে। পাশ করার জন্য অন্ততঃ 35 নম্বর পেতে হবে। একবার পরীক্ষায় অনেক ছাত্র ফেল করে যাচ্ছে দেখে রাজামশায় পরীক্ষকদের বলেছেন নম্বর বাড়িয়ে দিতে। নম্বর বাড়ানোর নিয়মও বাৎলে দিয়েছেন তিনি, যারা 25-এর বেশী কিন্তু 35-এর কম নম্বর পেয়েছে, তাদের নম্বর বাড়িয়ে 35 করে দিতে হবে, যাতে পাশ করে যায়। এই অব্ধি ঠিক ছিল, কিন্তু রাজামশাই আবার বিদ্যে জাহির করে সেটাকে function দিয়ে লিখতে গেছেন, এইভাবে--যারা x নম্বর পেয়েছিল, তারা এখন $f(x)$ নম্বর পাবে যেখানে

$$f(x) = 35 \text{ if } 25 < x < 35.$$

এটা কি তিনি ঠিক লিখেছেন?

SOLUTION: না। কারণ, যে ছাত্র আগে 90 পেয়েছিল সে এখন পাবে $f(90)$, কিন্তু আমাদের শর্ত হচ্ছে $25 < x < 35$, যার আওতায় $x = 90$ পড়ে না। তাই $f(90)$ হবে undefined, অর্থাৎ কিনা তার মার্কশীটে নম্বরের জায়গায় undefined ছাপা হবে!!! আসলে রাজামশায় বলতে চেয়েছিলেন যে, বাকিদের নম্বর অপরিবর্তিত থাকবে। কিন্তু $f(x)$ লেখার সময়ে সেটা লিখতে ভুলে গিয়েছিলেন। তাই তাঁর লেখা উচিত ছিল--

$$f(x) = \begin{cases} 35 & \text{if } 25 < x < 35 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}.$$

এখানে যেহেতু $0 \leq x \leq 100$ হবেই, তাই ওই শর্তটা আর আলাদা করে লিখি নি। ■

এবার অন্য সমস্যাটার একটা উদাহরণ দেখি।

Example 15: রাজামশায় শিক্ষা নিয়ে বড্ড মাথা ঘামাচ্ছেন। এবার তিনি ঠিক করেছেন মোটা নম্বর পাওয়াদের পুরস্কৃত করবেন। পুরস্কারের নিয়ম হল, যারা x নম্বর পাবে, তারা $f(x)$ টাকা পাবে, যেখানে

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 50 \\ 1000 & \text{if } 50 \leq x \leq 90 \\ 2000 & \text{if } 90 \leq x \leq 100 \end{cases}.$$

এর মধ্যে সমস্যা কোথায় দেখতে পাচ্ছ?

যদি দেখি কোনো পাজি বসে ঠিক মাঝামাঝি,
কি যে করি ভেবে নাহি পাইরে--
ভেবে দেখ একি দায়, কোন্ ন্যাজে মারি তায়
দুটি বই ন্যাজ মোর নাই রে!

--সুকুমার রায়

SOLUTION: মনে করো কেউ 50 নম্বর পেয়েছে, মানে এক্ষেত্রে $x = 50$. তার বেলায় $x \leq 50$ শর্তটাও খাটে, আবার $50 \leq x \leq 90$ শর্তটাও খাটে। প্রথম শর্ত অনুযায়ী তার কোনো পুরস্কার পাওয়ার কথা নয়, অথচ দ্বিতীয় শর্তটা বলছে যে তার 1000 টাকা পাওনা হয়! একইরকম সমস্যা হবে $x = 90$ নিয়েও। তাই শর্তগুলোর আওতা যেন আলাদা আলাদা হয়, সেটা খেয়াল রাখা কর্তব্য। যেমন, এইভাবে নিলে ঠিক ছিল--

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 50 \\ 1000 & \text{if } 50 \leq x < 90 \\ 2000 & \text{if } 90 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

বা এভাবে নিলেও চলত--

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 50 \\ 1000 & \text{if } 50 \leq x \leq 90 \\ 2000 & \text{if } 90 < x \leq 100 \end{cases}$$

■

1.6 ষষ্ঠ ধাপ--একাধিক variable ব্যবহার করা

এতক্ষণ আমরা একটা function-এ খালি একটাই variable ব্যবহার করছিলাম। চাইলে তার বেশী সংখ্যক variable-ও ব্যবহার করা যায়, যেমন $f(x,y) = x + 5y$. বা $f(x,y,z) = x + 5y + yz$. যন্ত্রের উপমা দিয়ে ভাবলে $f(x,y)$ হল এমন একটা যন্ত্র, যার দুটো ইনপুট, আর $f(x,y,z)$-এর তিনটে ইনপুট। আউটপুট দুজনের ক্ষেত্রেই একটা করে। নীচের অংকটা করে ব্যাপারটা হজম করে নেওয়া যাক।

Example 16: $f(x,y) = x - y - xy$ হলে $f(2,3)$ কত হবে? $f(y,x)$-ই বা কত হবে?

SOLUTION: $f(2,3)$ বার করা মানে $f(x,y)$-এর ফর্মুলায় $x = 2$ আর $y = 3$ বসানো। তাহলে পাবে $f(2,3) = 2 - 3 - 2 \times 3 = -7$. যদি $f(x,y)$-এর ফর্মুলায় x-এর জায়গায় y আর y-এর জায়গায় x বসাই, তবে পাবে $f(y,x) = y - x - yx$. ■

Exercise 12: যদি $f(x,y) = 3x + \frac{y}{x^2+1}$ হয়, তবে $f(t,t)$ কত হবে? $f(3,4)$-ই বা কত হবে? ■

এবার একটু কঠিন অংক করা যাক।

Example 17: ধরো $f(s,t) = \frac{1}{8}(s^2 - t^2)$. তাহলে $f(x+2y, x-2y)$ কত হবে?

SOLUTION: এখানে s-এর জায়গায় $x + 2y$ আর t-এর জায়গায় $x - 2y$ বসিয়ে দিলেই পাবে

$$f(x+2y, x-2y) = \frac{1}{8}\left(\ (x+2y)^2 - (x-2y)^2\ \right) = \cdots = xy.$$

■

আচ্ছা, যদি উল্টোটা করতে বলতাম তবে করা যেত? মানে যদি $f(x+2y, x-2y) = xy$ বলে দিয়ে $f(s,t)$ বার করতে দিতাম? অবশ্যই করা যেত। সেটাই করতে শিখব এইবার। কিন্তু তার আগে কায়দাটা একটা সহজ অংক দিয়ে বুঝে নিই, যেখানে খালি একটাই variable আছে।

Example 18: যদি $f(x+1) = x^2 - 5$ হয়, তবে $f(x) = ?$

SOLUTION: প্রথমে $x+1$-কে একটা নাম দিয়ে নাও, ধরো y, মানে $y = x+1$. তাহলে $x = y - 1$ হবে। তাই আমরা লিখতে পারি $f(y) = (y-1)^2 - 5$. মনে রেখো যে, y নামটা এখানে গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়, তাই আমরা ওর জায়গায় আবার x বসালেই পেয়ে যাব $f(x) = (x-1)^2 - 5$. এই জায়গাটায় মাথা গুলিয়ে যাওয়া অসম্ভব নয়! এই তো $y = x+1$ নিলাম, এরই মধ্যে আবার y-এর জায়গায় x বসালাম কী করে? তবে কি $x = x+1$ হয়ে যাবে না? না, ব্যাপারটা এইরকম--মনে করো তোমার সম্পর্কে কেউ কারো কাছে আড়ালে নিন্দা করেছে, তাতে তোমার মন খারাপ। তোমার বন্ধু তোমাকে সান্ত্বনা দিয়ে বলেছে-- "ও ওকে যাই বলুক, তুই তা নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছিস কেন?" এরকম বাক্যে দুইবার "ও" ব্যবহার হলেও দুটো "ও" কিন্তু দুটো আলাদা লোককে বোঝাচ্ছে। এখানেও তেমনি প্রথম x-টা (যার ভিত্তিতে আমরা $y = x+1$ লিখেছিলাম), আর পরের x-টা (যেটা y-এর বদলে বিকল্প অক্ষর হিসেবে লিখেছিলাম) তারা আসলে আলাদা। ■

সাবধান! এখানে দুই অর্থে x অক্ষরটাকে ব্যবহার করা গেলেও, এরকমটা না করাই ভালো, খামোখা মাথা গুলিয়ে যাবে। পরের x-টার বদলে w বা t বা অন্য কিছু অক্ষর লিখলেও চলত। নীচের অংকটায় অবশ্য তোমার মাথা গুলিয়ে দেওয়াই পরীক্ষকের উদ্দেশ্য--

Example 19: If $f(x+2y, x-2y) = xy$, then $f(x,y)$ is equal to

(A) $\frac{1}{4}xy$ (B) $\frac{1}{4}(x^2 - y^2)$ (C) $\frac{1}{8}(x^2 - y^2)$ (D) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

(JEE2011.79)

SOLUTION: এখানে আমরা $s = x + 2y$ এবং $t = x - 2y$ বসাব। এবার আমাদের কাজ হল x, y-কে s, t দিয়ে প্রকাশ করা। একটু কষলেই দেখবে $x = \frac{1}{2}(s + t)$ আর $y = \frac{1}{4}(s - t)$ হচ্ছে। সুতরাং $f(s, t) = \cdots = \frac{1}{8}(s^2 - t^2)$. আমাদের অবশ্য $f(s, t)$ বার করতে বলেনি, বলেছিল $f(x, y)$ বার করতে। কিন্তু সে তো খালি অক্ষরের পার্থক্য। সুতরাং (C)-টাই খালি ঠিক। ■

DAY 2
গ্রাফ আঁকা (প্রথম পর্ব)

বর্ণিতে রূপ গুণ সাধ্য কি কবিতার
চেহারার কি বাহার -- ওই দেখ ছবি তার।
--ট্যাঁশ গরু (সুকুমার রায়)

যদি একজন মানুষের বর্ণনা দিই--টাক মাথা, গোঁফ আছে, চোখে গোল গোল চশমা, হাতে লাঠি, সামনে একটু ঝুঁকে চলেন, তবে তুমি বলবে এরকম মানুষ অনেক থাকতে পারে। কিন্তু যদি Fig 13-এর মত ছবি এঁকে দিই, অমনি আর মানুষটার পরিচয় নিয়ে সন্দেহ থাকে না। Function-দের বেলাতেও তেমনি। ফর্মুলা দিয়ে যতই বর্ণনা দিই না কেন, একটা ছবি এঁকে দিতে পারলে ব্যাপারটা যত পরিষ্কার হয়, তেমনটা আর কিছুতেই হয় না। Function-এর ছবি আঁকা মানে তার গ্রাফ আঁকা। গ্রাফ আঁকার সাথে খানিকটা পরিচয় আমাদের মাধ্যমিকের আগেই হয়ে থাকে। একটা উদাহরণ দিয়ে মনে করে নিই।

Example 20: ধরো আমরা $f(x) = x + 1$-এর গ্রাফ আঁকতে চাই। এর জন্য আমরা প্রথমে দুটো axis (অক্ষ) নিয়ে শুরু করি (Fig 14)। এবার x-এর কোনো একটা value নিই, ধরো $x = 1$. সেখানে $f(x)$-এর value হবে $f(1) = 2$. এইভাবে x-এর একটা value আর তার জন্য $f(x)$-এর value-টা মিলিয়ে একটা বিন্দু পেলাম $(1, 2)$. এই বিন্দুটাকে গ্রাফের উপর আঁকব (Fig 15)। এইভাবে x-এর যাবতীয় value-র জন্যই একটা করে বিন্দু পাবে (যেমন $x = 1.2$ নিলে $f(1.2) = 2.2$, এইরকম)। এই রকম যাবতীয় বিন্দুকে গ্রাফকাগজে এঁকে ফেললে যে ছবিটা পাবে, সেটাকেই বলে $f(x)$-এর গ্রাফ। আমাদের এই উদাহরণে গ্রাফটা হয়েছে একটা সরলরেখা (Fig 16)। ■

গ্রাফ কাকে বলে সেটা বোঝা গেল, কিন্তু সেটা আঁকব কী করে? বোঝাই যাচ্ছে যে, x এখানে অসংখ্য value নিতে পারে $(1, 1.1, 1.11, 2, 2.56, -6, \pi$, ইত্যাদি যা খুশি!)। এরকম সব value-র জন্য $f(x)$ বার করে বিন্দু আঁকতে গেলে তো একটা গ্রাফ আঁকতেই জীবন কেটে যাবে! তাই আমরা এখানে একটা সহজ কায়দা শিখব, যেটা একটু অভ্যাস হয়ে গেলেই চটপট করা যাবে। এই কায়দায় গ্রাফ যে খুব নিখুঁত হয় এমন নয়, কিন্তু তাতেই তার মূল ধর্মগুলো চমৎকার চেনা যাবে। ঠিক যেমন Fig 13-এ হয়েছে। গান্ধীজীর ঠ্যাংদুটো মোটেই অমন কাঠি কাঠি ছিল না। কিন্তু তাতে জাতির জনককে চিনতে কিছুমাত্র অসুবিধা হচ্ছে না!

গ্রাফ আঁকার কায়দা শেখার আগে কয়েকটা উদাহরণ করে গ্রাফের ধারণাটার সঙ্গে বন্ধুত্ব করে নেওয়া যাক।

Fig 13

Fig 14

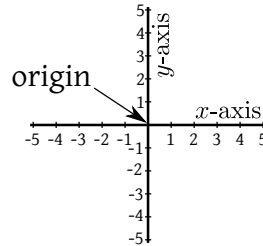



Fig 15

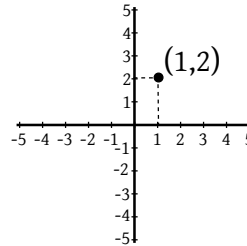



Fig 16

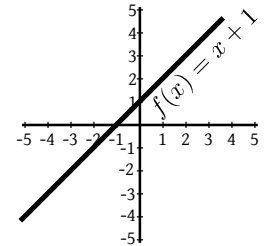
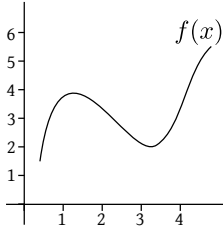
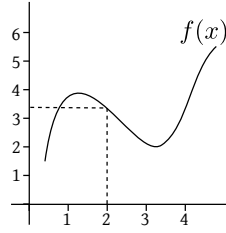
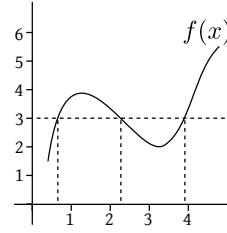



Fig 17 **Fig 18** **Fig 19**

Example 21: Fig 17-এ একটা function-এর গ্রাফ রয়েছে। ছবিটা দেখে চোখের আন্দাজে বলো তো $f(2)$ কত। আচ্ছা, ছবিটায় x-এর এরকম কতগুলো value রয়েছে যেখানে $f(x) = 3$?

SOLUTION: Fig 18-এর মত করে $x = 2$ দিয়ে একটা vertical লাইন আঁকলেই দেখবে যে $f(2)$ হচ্ছে 3.5-এর চেয়ে সামান্য কম একটা সংখ্যা। Fig 19-এর মত করে y-axis-এর 3 দিয়ে একটা horizontal লাইন টেনে দ্যাখো গ্রাফটার গায় কত জায়গায় লাগে। এখানে তিন জায়গায় লেগেছে, তার মানে x-এর এরকম তিনটে value আছে যাদের জন্য $f(x) = 3$ হবে। ■

এবার একটা উদাহরণ দেখব যার মূলমর্মটা পরে কাজে দেবে।

Example 22: Fig 20-এর ছবিটা কি কোনো function-এর গ্রাফ হতে পারে?

SOLUTION: না, কারণ যদি $x = 2$ দিয়ে একটা vertical লাইন টানো (Fig 21), তবে সেটা গ্রাফটার গায় একাধিক জায়গায় লাগে। তার মানে $f(2)$-র একাধিক value হয়ে যাচ্ছে! কিন্তু আমরা জানি যে, x-এর value জানা থাকলে $f(x)$-এর ঠিক একটাই value বেরোয়, একাধিক বেরোতে পারে না। ■

এবার আবার গ্রাফ আঁকার প্রসঙ্গে ফিরে আসি। যে নতুন কায়দাটা শিখতে চলেছি, সেটা দুধাপে কাজ করে--

- প্রথম ধাপে কিছু সহজ function-এর গ্রাফ শিখে রাখতে হবে।
- দ্বিতীয় ধাপে সেগুলোকে ব্যবহার করে অন্যান্য গ্রাফ বানাতে হবে।

প্রথম ধাপটা শেখা দিয়ে শুরু করা যাক।

2.1 কিছু সহজ গ্রাফ

এখানে আমাদের কাজ হবে কিছু বহুলব্যবহৃত function-এর সঙ্গে এমনভাবে পরিচিত হওয়া, যাতে এদের ফর্মুলা দেখলেই ধাঁ করে মন থেকে গ্রাফটা এঁকে ফেলতে পারি।

Fig 20

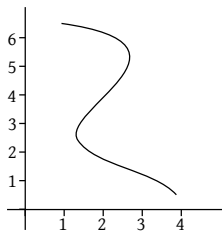
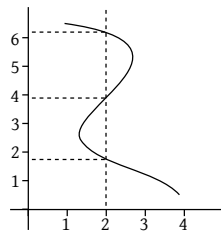



Fig 21

2.1.1 যেসব function-এর গ্রাফ সরলরেখা হয়

এই কটা function দ্যাখো--

$$2x+3, \quad -x+6, \quad x-8.$$

এদের সবার চেহারাই একইরকম, x-কে একটা সংখ্যা দিয়ে গুণ করে আরেকটা সংখ্যা যোগ করা হয়েছে, যেমন $x-8$-এর বেলায় x-কে 1 দিয়ে গুণ করে -8 যোগ করা হয়েছে। এরকম function-দের গ্রাফ সর্বদা একটা সরলরেখা হয়। বিপরীতপক্ষে, কোনো function-এর গ্রাফ যদি সরলরেখা দ্যাখো, অমনি জানবে তার চেহারাটা এইরকম।
এই চেহারাটার বর্ণনা করা যায় এইভাবে--x-কে যে সংখ্যাটা দিয়ে গুণ করা হয়েছে, তাকে যদি m বলি, আর তারপরে যে সংখ্যাটা যোগ করা হয়েছে, তাকে যদি c বলি, তবে function-টার চেহারা হচ্ছে

$$f(x) = mx + c.$$

এই চেহারাটার সঙ্গে ভালো করে পরিচিত হবার জন্য নীচের অংকটা করে নাও।

Example 23: নীচের function-গুলোর কোনটা $mx+c$ চেহারার? এদের জন্য m আর c বার কর।

(*i*) $2x+3$ (*ii*) $5-2x$ (*iii*) $2x^2+3$ (*iv*) $2(x+3)$ (*v*) $\frac{x}{2}$ (*vi*) 26

SOLUTION:

1. দেখাই যাচ্ছে যে এখানে $m=2$ আর $c=3$.
2. এখানে $m=-2$ আর $c=5$.
3. $mx+c$ চেহারার মধ্যে কোনো x^2 নেই। কিন্তু আমাদের function-টায় আছে। তাই এটা মোটেই $mx+c$ চেহারার নয়।
4. $2(x+3)$-কে $2x+6$ আকারে লিখে নিলেই বুঝবে $m=2$ আর $c=6$.
5. এটা আসলে $\frac{1}{2}\times x+0$. তাই $m=\frac{1}{2}$ আর $c=0$ হবে।
6. এখানে কোনো x নেই দেখে খাবি খেও না। ভাবতে পারো যেন এই function-টা এমন একটা যন্ত্র যার আউটপুট সবসময়েই 26, তা সে যাই ইনপুট দাও না কেন! যাই হোক, এই 26-কে আমরা $0\times x+26$ হিসেবে লিখলেই বুঝে যাবে $m=0$ আর $c=26$ নিতে হবে।

তারপর কোথ্থেকে একটা পুরোনো দরজির ফিতে এনে সে আমার মাপ নিতে শুরু করল, আর হাঁকতে লাগল, "খাড়াই ছাব্বিশ ইঞ্চি, হাতা ছাব্বিশ ইঞ্চি, ছাতি ছাব্বিশ ইঞ্চি, গলা ছাব্বিশ ইঞ্চি।" আমি ভয়ানক আপত্তি করে বললাম "এ হতেই পারে না। বুকের মাপও ছাব্বিশ ইঞ্চি, গলাও ছাব্বিশ ইঞ্চি? আমি কি শুওর?" বুড়ো বলল, "বিশ্বাস না হয় দেখ।"
দেখলাম ফিতের লেখাটেখা সব উঠে গিয়েছে, খালি ২৬ লেখাটা একটু পড়া যাচ্ছে, তাই বুড়ো যা কিছু মাপে সবই ছাব্বিশ ইঞ্চি হয়ে যায়।

--হ য ব র ল

■

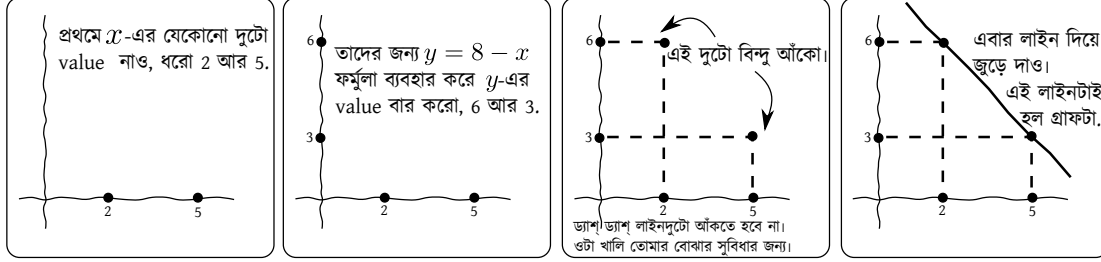
এবার নীচের অংকটা করতে পারলে বুঝব ব্যাপারটা তোমার মাথায় ঢুকেছে।

Exercise 13: নীচের function-গুলোর কোনটা $mx+c$ চেহারার? এদের জন্য m আর c বার কর।
(*i*) $4x-9$ (*ii*) $\frac{2-x}{3}$ (*iii*) $5-\frac{1}{x}$ (*iv*) 0 (*v*) $(x-1)^2-x^2$ (এইটাতে সাবধান!)
■

আমরা $mx+c$ চেহারাটার সঙ্গে পরিচিত হলাম। এরকম function-এর একটা সুবিধার কথা তো বললামই, এদের গ্রাফ সবসময়ে সরলরেখা হয়। একটা গ্রাফ সরলরেখা হলে সেটা আঁকা খুব সহজ, একটা উদাহরণ দিয়ে দেখাই।

Example 24: $f(x) = 8 - x$-এর গ্রাফটা আঁকো। গ্রাফ কাগজে নয়, এমনি সাদা পাতায়, খালি হাতে আঁকতে হবে।

SOLUTION: ধাপগুলো ছবি এঁকে বোঝানোই সুবিধা। সব কিছুই খালি হাতে আঁকতে হবে, তাই লাইনগুলো একটু আঁকাবাঁকা দেখাচ্ছে।

■

এবার তোমার আঁকার জন্য একটা গ্রাফ দিই--

Exercise 14: $f(x) = 2x - 4$-এর গ্রাফ আঁকো। খালি হাতে ঝট্ করে আঁকতে হবে কিন্তু! ■

একটা সরলরেখার ফর্মুলা দেওয়া থাকলে তা থেকে সরলরেখার গ্রাফটা আঁকা কঠিন নয়। কিন্তু ক্যালকুলাস করার সময়ে আমাদের বেশী কাজে লাগে উল্টো দিকটা--একটা গ্রাফ যদি সরলরেখা হয়, তবে সেটা দেখে তার function-টা আন্দাজ করা। সেটা শেখার জন্য মনে করো যেন গ্রাফটা কম্পিউটারের পর্দায় আঁকা আছে। আর তোমার কাছে দুটো স্লাইডার আছে, যেগুলোকে নাড়িয়ে চাড়িয়ে তুমি m আর c-কে ইচ্ছে মত কমাতে বা বাড়াতে পারো। যেমন যেমন বাড়াবে-কমাবে সরলরেখাটাও তার সঙ্গে তাল রেখে নড়বে। ব্যাপারটা অ্যানিমেশন দিয়ে বুঝিয়েছি এই ওয়েবপেজে--

http://www.isical.ac.in/∼arnabc/diffcal/

যাদের পক্ষে অ্যানিমেশনটা দেখা সম্ভব হচ্ছে না, তাদের জন্য মোদ্দা কথাটা জানিয়ে রাখি--

- c যত বাড়াবে ততই গ্রাফটা উঠবে, আর কমালে নামবে। Fig 22 দ্যাখো। ওঠানামা করবে কিন্তু ঘুরে যাবে না, নিজের সঙ্গে সমান্তরাল থেকে ওঠানামা করবে খালি। বস্তুতঃ, c হল লাইনটা যেখানে y-axis-কে ছেদ করেছে সেই বিন্দুটায় y-এর value.
- যদি m বদলাও, তবে লাইনটা ঘুরতে শুরু করবে। Fig 23 দেখে নাও। যে বিন্দুতে লাইনটা y-axis-কে ছেদ করে সেই বিন্দুটা স্থির থাকবে, ওটাকে কেন্দ্র করে পুরো লাইনটা ঘুরবে।

Fig 22

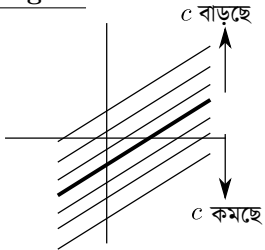



Fig 23

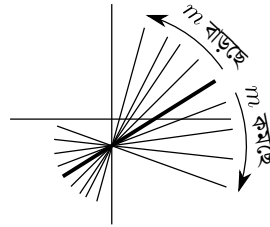
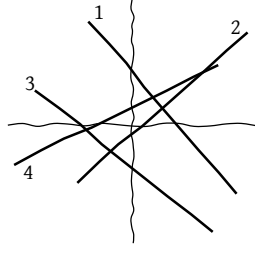
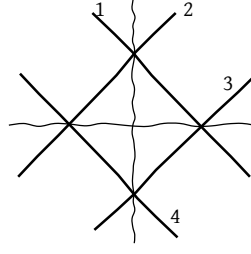
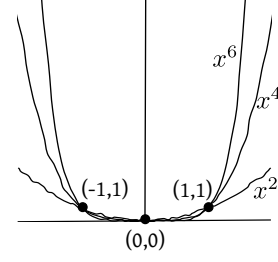



Fig 24 **Fig 25** **Fig 26**

যদি $m > 0$ হয়, তবে গ্রাফটা দক্ষিণ-পশ্চিম থেকে উত্তর-পূর্ব দিকে বিস্তৃত থাকবে। m যত বাড়বে, ততই লাইনটা খাড়া হবে। যদি $m < 0$ হয়, তবে লাইনটা দক্ষিণ-পূর্ব থেকে উত্তর-পশ্চিমে হেলানো থাকবে। যতই m কমবে (মানে বেশী বেশী negative হবে), ততই আরো খাড়া হবে লাইনটা। যদি $m = 0$ হয়, তবে লাইনটা একেবারে horizontal (অনুভূমিক) থাকবে। এই কথাগুলো তোমার মজ্জার মধ্যে মিশিয়ে নাও, যেন চোখ বুঁজলেও দেখতে পাও।

Example 25: Fig 24-এ চারটে গ্রাফ রয়েছে, যারা প্রত্যেকেই সরলরেখা। এদের function-গুলোকে যদি $mx + c$ আকারে লিখি, তবে এদের মধ্যে কাদের কাদের বেলায় $m > 0$? কাদের বেলায় $c > 0$?

SOLUTION: 2 এবং 4 নম্বরের বেলায় $m > 0$. আর 1 এবং 4-এর বেলায় $c > 0$. এইটা বুঝলাম এইভাবে--প্রথমে দ্যাখো লাইনগুলো কোথায় কোথায় y-axis-কে ছেদ করেছে। সেই ছেদ বিন্দুটা যদি x-axis-এর নীচে থাকে তবে $c < 0$, যদি উপরে থাকে তবে $c > 0$ হবে। আর যদি লাইনটা origin দিয়ে যায়, তবে $c = 0$ হবে। ■

দেখতে পাচ্ছ যে, m নিয়ন্ত্রণ করছে লাইনটা কতটা খাড়া সেটা, যাকে ইংরাজিতে বলে বলে slope. তাই অংকের ভাষায় m-কেই বলা হয় **slope.** ওদিকে c নিয়ন্ত্রণ করছে লাইনটা কোথায় y-axis-কে ছেদ করছে। এই c-কে অংকের ভাষায় বলে **intercept.**

কোনো গ্রাফ সরলরেখা হলে সেটা দেখেই বলতে পারা উচিত তার slope-টা positive নাকি negative. দুটো সরলরেখার মধ্যে কার slope বেশী সেটাও চোখে দেখেই বুঝতে পারা যায়। এই বুঝতে পারাটা ক্যালকুলাস শেখার জন্য অপরিহার্য। নীচের অংকগুলো করে সড়গড় হয়ে নাও।

Exercise 15: আবার Fig 24 দ্যাখো। বলো তো 2 এবং 4-এর মধ্যে কার slope বেশী। এবার বলো 1 এবং 3-এর মধ্যে কার slope বেশী। এখানে সাবধান, slope কথাটার সাধারণ অর্থ হল "ঢাল", কিন্তু অংকের জগতে একটা সরলরেখা গ্রাফের slope মানে ওর ফর্মুলাকে $mx + c$ আকারে লিখলে m-এর value. 1 আর 3-এর slope-এর মধ্যে তুলনা করার সময়ে এ কথাটা মাথায় না রাখলে মুস্কিলে পড়বে। ■

Exercise 16: Fig 25-এ চারটে সরলরেখা গ্রাফ রয়েছে। এদের মধ্যে কাদের কাদের slope সমান, আর কাদের কাদের intercept সমান? ■

2.1.2 x^n-জাতীয় function-দের গ্রাফ

এবার শিখব x^2, x^3, x^4 ইত্যাদির গ্রাফ দেখতে কীরকম হয়। এদের চেহারা মনে রাখা খুব সহজ। প্রথমে x^2, x^4, x^6 ইত্যাদির কথা বলি, মানে x^n যেখানে n হল even (জোড়)। এদের গ্রাফ হয় কতকটা বাটির মত। Fig 26 দ্যাখো। এটা খালি হাতে আঁকার মত করে কাঁপাকাঁপা লাইনে এঁকেছি। এরা y-axis-এর দুদিকে একদম একইরকম হয়, ঠিক যেন আয়নায় প্রতিফলন। এরা সবসময়েই $(0, 0), (1, 1)$ আর $(-1, 1)$, এই তিনটে বিন্দু দিয়ে যায়। যতই n বাড়ছে, ততই লক্ষ কর বাটির তলাটা থ্যাবড়া হয়ে x-axis-এর সঙ্গে মিশে যাচ্ছে, আর "হাত"-দুটো বেশী বেশী খাড়া হয়ে উঠছে।

এবার বলি n-টা odd (বিজোড়) হলে কী হয়। এখানে ব্যাপারটা একটু অন্যরকম (Fig 27)। যদি $n = 1$ হয়, তবে x^n মানে x, যার গ্রাফ হল একটা সরলরেখা। তাই সরলরেখা গ্রাফ আঁকার যে কায়দা শিখেছি তাই দিয়েই কাজ চলে যাবে। এবার দেখি $n = 3, 5, 7, ...$ ইত্যাদি হলে কী হয়। এতক্ষণ Fig 26-এ যে কয়টা গ্রাফ দেখলে (মানে n-টা যেখানে even

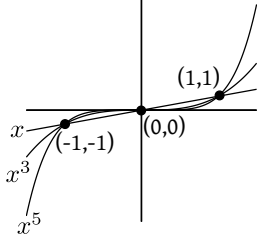
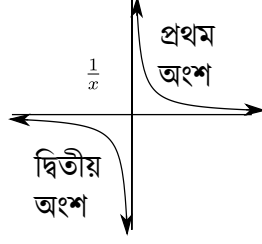
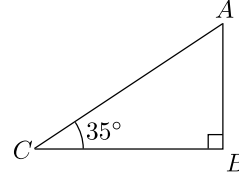



Fig 27 Fig 28 Fig 29

), সেগুলো যেন দুহাত তুলে নৃত্য করছিল। যদি n-টা odd হয়, তবে বাঁহাতটা নীচে নেমে আসবে। এখানে গ্রাফটা সর্বদাই $(-1,-1),(0,0)$ এবং $(1,1)$ দিয়ে যাবে। যতই n বাড়বে ততই -1 থেকে 1-এর মধ্যে গ্রাফটা থেবড়ে x-axis-এর সঙ্গে মিশে যেতে থাকবে, এবং হাত দুটো ক্রমশঃ বেশী বেশী খাড়া হবে। ছবি দেখে চেহারাটার সঙ্গে পরিচিত হয়ে নাও। লক্ষ করো $n = 3, 5, \ldots$ হলে origin-এর কাছটায় কীরকম একটা প্যাঁচ খায়।

2.1.3 $\frac{1}{x}$-এর গ্রাফ

$\frac{1}{x}$-এর গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 28-এ। এই চেহারাটা মনে রাখো। প্রথম কথা, এর দুটো অংশ। দুটো অংশই একইরকম দেখতে, খালি উল্টো করে বসানো। দ্বিতীয় কথা, যতই x বড় হচ্ছে, ততই $\frac{1}{x}$ ছোটো হতে হতে শূন্যর কাছে চলে যাচ্ছে। ঠিক যেমন একটা কেক যদি অনেক অনেক লোকের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করে দেওয়া হয় তবে প্রত্যেকের ভাগেই খুব সামান্য অংশই পড়ে। এই কারণে x যতই বাড়ছে, $\frac{1}{x}$-এর গ্রাফটা ততই x-axis-এর সঙ্গে যেন একেবারে মিশে যাচ্ছে, যদিও কোনো সময়েই axis-টাকে স্পর্শ করছে না।

2.1.4 Trigonometric function

মাধ্যমিকের আগেই আমরা $\sin x, \cos x$ আর $\tan x$-এর কথা শিখি। এরাও কিন্তু function, এদের বলে এককেটা trigonometric function. এদের গ্রাফ দেখতে কীরকম হয় শিখব এবার। তার আগে বলে নিই যে, মাধ্যমিকের আগে এদের যে সংজ্ঞা শিখেছিলাম, এখানে তার চেয়ে একটু জটিল সংজ্ঞা ব্যবহার করব। সেটা আগে বুঝে নিই। ধরো জিজ্ঞাসা করলাম $\sin 35°$ আর $\cos 35°$ মানে কী। তার উত্তর ছিল এইরকম--

> প্রথমে Fig 29-এর মত একটা right angled triangle (সমকোণী ত্রিভুজ) আঁকতে হবে। তবে $\sin 35°$ মানে হল $\frac{AB}{AC}$, আর $\cos 35°$ হল $\frac{BC}{AC}$.

এবার যদি বলি $\sin 100°$ কত, তবে তুমি কী করবে? তুমি তো এখানে আর এমন একটা সমকোণী ত্রিভুজ আঁকতে পারবে না, যার একটা কোণ $100°$, কারণ একটা সমকোণী ত্রিভুজে বাকি কোণ দুটো কেউই $90°$-র চেয়ে বড় হতে পারে না। সুতরাং মাধ্যমিকের সংজ্ঞাটার দৌড় ওই $90°$-র আগে পর্যন্তই। কিন্তু ক্যালকুলাস শেখার সময়ে আমাদের যেকোনো কোণের জন্যই sin আর cos বার করতে হবে। তাই সংজ্ঞাটাকে একটু বাড়িয়ে নেওয়া দরকার। এর জন্য মাধ্যমিকের আগের সংজ্ঞাটাকে একটু অন্য দৃষ্টিভঙ্গী থেকে দেখব--

> মনে করো একটা চাকা আছে, যার radius (ব্যাসার্ধ) হল 1 এবং কেন্দ্রটা গ্রাফ কাগজের origin-এ বসানো (Fig 30)। চাকার পরিধির উপরে positive x-axis-এর উপরে যে বিন্দুটা আছে সেটাকে A নাম দাও। এবার চাকাটাকে $35°$ ঘোরাও ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে (Fig 31)। বলো তো এখন A-র অবস্থান কী হবে, মানে যদি (x, y) আকারে লিখি, তবে x কত আর y-ই বা কত হবে?

বোঝার সুবিধার জন্য Fig 31-এ A দিয়ে একটা horizontal আর একটা vertical লাইন ড্যাশ্ ড্যাশ্ করে এঁকে দেখিয়েছি। তাহলে এখানেও সেই আগের right angled triangle-টাই পাচ্ছ, ABC. সুতরাং দেখতেই পাচ্ছ যে, $x = \cos 35°$ আর $y = \sin 35°$ হতে বাধ্য। কিন্তু যদি চাকাটা $90°$-র চেয়েও বেশী ঘোরে, তবে আর মাধ্যমিকের সংজ্ঞাটা খাটবে না। আমরা তাই মাধ্যমিকের সংজ্ঞাটাকেই একটু বাড়িয়ে নেব এই বলে যে, চাকাটা যেই কোণেই ঘোরাও না কেন (ধরো $\theta°$ কোণে ঘোরালাম), তবে A-এর অবস্থানকেই আমরা $(\cos\theta°, \sin\theta°)$ বলব। এটাই আমাদের নতুন সংজ্ঞা হবে। যেমন Fig 32-এ আমরা $234°$-র sin আর cos বার করছি। ছবিটা থেকে দেখা যাচ্ছে যে, $\cos(234°) = -0.59$ আর $\sin(234°) = -0.81$.

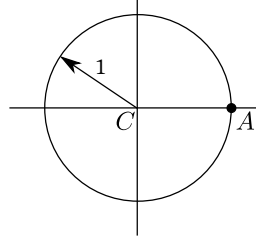
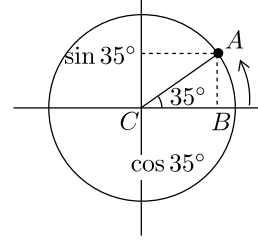



Fig 30 **Fig 31**

আমাদের নতুন সংজ্ঞাটা যেকোনো কোণের জন্যই খাটবে, positive, negative, যা খুশি। Fig 33-এ যেমন $\sin(-400^\circ)$ আর $\cos(-400^\circ)$ বার করা দেখানো হয়েছে। এখানে -400° মানে লাইনটা ঘড়ির কাঁটার দিকে 400° ঘুরেছে, অর্থাৎ একবার সম্পূর্ণ পাক খাওয়ার পরও আরো 40° গেছে।

Exercise 17: Fig 33 দেখে বলো তো $\sin(-400^\circ)$ আর $\cos(-400^\circ)$ কত কত! ■

কোণ মাপার একটা একক হল ডিগ্রী $(^\circ)$. এর প্রচলন করেছিল অতি প্রাচীনকালে ব্যাবিলনের লোকেরা। এখানে পুরো একটা পাককে ধরা হয় 360°. খামোখা এই 360 সংখ্যাটা কোথা থেকে এলো? এর একটা ঐতিহাসিক কারণ আছে বটে, কিন্তু সেটা আমাদের পক্ষে খুব একটা কাজের নয়। আধুনিক কালে আমরা অন্য একটা একক ব্যবহার করি যাতে কাজের সুবিধা বেশী। সেই এককটার নাম **radian** (রেডিয়ান)। এই এককের সুবিধা হল, এর সাহায্যে কোনো circle-এর arc-এর (মানে বৃত্তচাপের) দৈর্ঘ্য চট্‌ করে বার করে ফেলা যায়। যেমন, যদি একটা circle-এর একটা sector নাও Fig 34-এর মত, তবে ওর কেন্দ্রের কোণটা যত রেডিয়ান হবে, তাকে radius দিয়ে গুণ করে দিলেই arc-টার দৈর্ঘ্য পেয়ে যাবে! আমাদের বইতে অবশ্য arc-এর দৈর্ঘ্য বার করা নিয়ে আমরা মাথা ঘামাব না। কিন্তু তাও সব জায়গায় রেডিয়ান এককেই কোণ মাপব। এই এককে পুরো এক পাক হয় 2π রেডিয়ান। এটা দেখতে যদি বিচ্ছিরি লাগে, তবে ভেবে দ্যাখো 360°-ই বা কি এমন সুচ্ছিরি ছিল!

এককের কথা অনেক হল। এবার trigonometric function-দের সম্বন্ধে কয়েকটা কথা বলে শেষ করি।

লক্ষ করো x যতই বাড়ছে, চাকাটাও ততই ঘুরছে, এবং $\sin x$ (এবং $\cos x$-ও) একবার উঠছে, তারপর নামছে, তারপর ফের উঠছে, ফের নামছে, এইভাবে হয়েই চলেছে, কিন্তু কোনোভাবেই -1-এর নীচে বা 1-এর উপরে যেতে পারছে না। যেহেতু চাকাটা একই জায়গায় ঘুরে চলেছে, আর একবার ঘোরা মানে 2π radian, তাই $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ এবং $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ হতে বাধ্য।

> বুড়ো বলল, ... "আমার বয়স তো কত উঠল নামল, আবার উঠল--এখন আমার বয়স হয়েছে তেরো।"
> শুনে আমার ভয়ানক হাসি পেয়ে গেল।
>
> -- হ য ব র ল

এই ঢেউয়ের মত ক্রমাগত ওঠাপড়ার ব্যাপারটা বোঝা যাবে $\sin x$ আর $\cos x$-এর গ্রাফ দুটো দেখলে (Fig 35, Fig 36)। মাধ্যমিকের আগে যে সংজ্ঞা শিখেছিলাম, সেখানে $\tan x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ আর $\cot x$-কে $\sin x$ আর $\cos x$ দিয়ে লিখে ফেলা যেত এইভাবে--

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Fig 32

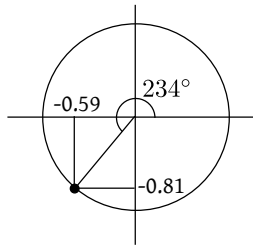



Fig 33

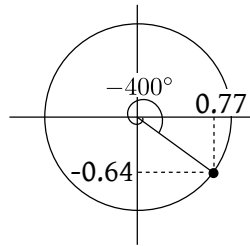



Fig 34

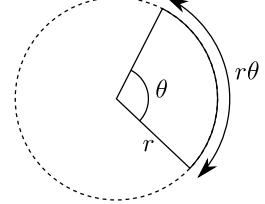
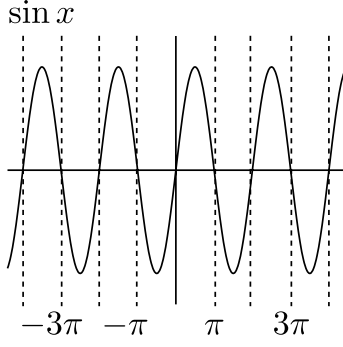
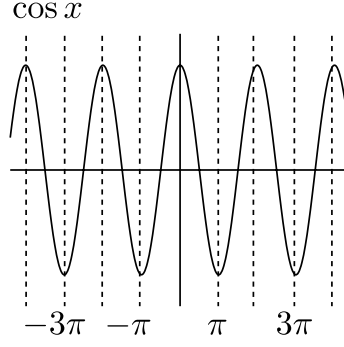
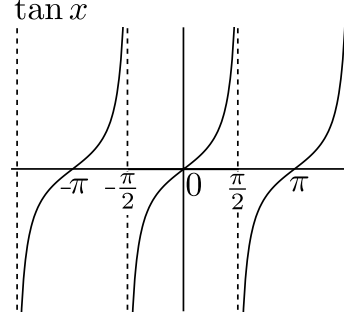



Fig 35 **Fig 36** **Fig 37**

এখানেও এইগুলো ব্যবহার করব। খালি একটা ব্যাপারে সাবধান থাকতে হবে। মাধ্যমিকের আগের সংজ্ঞায় $\sin x$ আর $\cos x$ সব সময়ে > 0 আর < 1 হত। আমাদের বাড়িয়ে নেওয়া সংজ্ঞায় হয়েছে ≥ -1 আর ≤ 1. এখন কিন্তু $\sin x$-টা 0 হতে পারে, $\cos x$-ও 0 হতে পারে। সুতরাং $\sin x$ বা $\cos x$ দিয়ে ভাগ করার সময়ে এই সব x-দের বাঁচিয়ে চলতে হবে। অর্থাৎ যেমন $\cos x$-টা x-এর যেসব value-র জন্য 0 হয়ে যাবে, তাদের জন্য $\tan x$-কে undefined বলব। সেই সব value-তে $\sec x$-ও হবে undefined, কারণ ওর বেলাতেও নীচে $\cos x$ আছে। আবার x-এর যেসব value-তে $\sin x = 0$ হবে, সেখানে $\operatorname{cosec} x$ আর $\cot x$ হবে undefined. এতসব শুনে খটোমটো লাগলে অভয় দিয়ে বলি যে, এখানে মনে রাখার কথা খালি একটাই, 0 দিয়ে ভাগ করতে গেলেই undefined হয়ে যায়, ব্যস্!
Fig 37-এ $\tan x$-এর গ্রাফটা দেখে নাও।

2.1.5 e^x আর $\log x$

এবার একটা নতুন function-এর কথা শিখব, e^x. এর সংজ্ঞাটা একটু খটোমটো দেখতে--

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

অর্থাৎ যদি x-এর যে কোনো একটা value নাও (ধরো $x = 2$), এবং $1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots$ এইভাবে যোগ করতে থাকো, তবে দেখবে যোগফলগুলো একটা সংখ্যার দিকে এগিয়ে যাচ্ছে। এই সংখ্যাটাকেই বলব e^2. হাতের কাছে ক্যালকুলেটর থাকলে পরীক্ষা করে দেখতে পারো নীচের সংখ্যাগুলো আসছে কিনা।

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \tfrac{2^2}{2!} &= 5.00 \\
1 + 2 + \cdots + \tfrac{2^3}{3!} &= 6.33 \\
1 + 2 + \cdots + \tfrac{2^4}{4!} &= 7.00 \\
1 + 2 + \cdots + \tfrac{2^5}{5!} &= 7.27 \\
1 + 2 + \cdots + \tfrac{2^6}{6!} &= 7.36 \\
1 + 2 + \cdots + \tfrac{2^7}{7!} &= 7.38 \\
1 + 2 + \cdots + \tfrac{2^8}{8!} &= 7.39 \\
1 + 2 + \cdots + \tfrac{2^9}{9!} &= 7.39 \\
1 + 2 + \cdots + \tfrac{2^{10}}{10!} &= 7.39
\end{aligned}$$

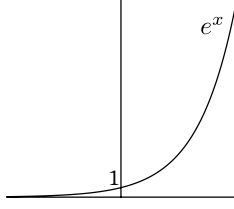
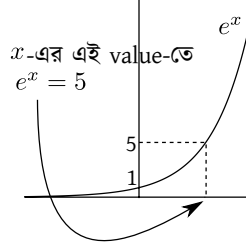
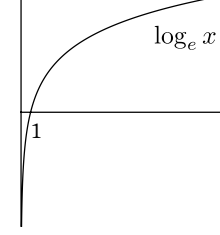



Fig 38 **Fig 39** **Fig 40**

লক্ষ কর যোগফলগুলো কেমন গুটিগুটি করে 7.39-এর কাছে এসে স্থির হয়ে গেল। ওইটাই হল e^2-এর value. এখানে অবশ্য আমরা দশমিকের পর খালি দুই ঘর দেখিয়েছি। আরো বেশী ঘর দেখালে পেতে 7.389056... আমরা এখানে $x = 2$ নিয়ে দেখালাম। কিন্তু x-এর অন্য যে কোনো value নিলেও একইরকম ব্যাপার দেখতে, মানে যোগফলগুলো গুটিগুটি চরণে কোনো একটা সংখ্যার কাছে এসে ক্রমশঃ স্থির হয়ে আসত। এমন আচরণের পিছনে কারণ কী, সেটা আলোচনার স্থান এটা নয়। আপাততঃ খালি জেনে রাখো যে এমনটা হয়।
সংজ্ঞাটা যতই খটোমটো দেখতে হোক, e^x-এর গ্রাফটা দেখতে কিন্তু বেশ মিষ্টি (Fig 38)। এই গ্রাফটার ব্যাপারে কয়েকটা জিনিস লক্ষ কর--

1. যতই ডানদিকে যাবে, গ্রাফটা ততই উঠছে। এবং ক্রমশঃই বেশী বেশী খাড়া হয়ে উঠছে।
2. গ্রাফটা কখনোই x-axis-এর নীচে যাচ্ছে না।
3. যতই বাঁদিকে যাবে, গ্রাফটা ক্রমশঃ x-axis-এর সঙ্গে যেন মিশে যাচ্ছে। কিন্তু কখনোই গ্রাফটা x-axis-কে স্পর্শ করছে না (যদিও ছবি দেখে সেটা বোঝা কঠিন)।

গ্রাফটার দিকে তাকিয়ে এই কয়টা জিনিসের উত্তর দাও তো--

- প্রথমে বলো, x-এর এমন কোনো value আছে কি, যাতে $e^x = 5$ হয়? একবার Fig 39-এর দিকে তাকালেই বুঝবে যে, আছে। এবং শুধু আছে তাই নয়, x-এর এরকম ঠিক একটাই value সম্ভব।
- এবার x-এর এমন value দিতে পারো, যাতে $e^x = -5$ হয়? না, এবার আর সম্ভব নয়। কারণ, গ্রাফটা কখনোই x-axis-এর নীচে যায় নি।

গ্রাফটার দিকে ভালো তাকালেই বুঝবে যে, যদি কোনো $y > 0$ দিই, তবে অমনি তুমি x-এর একটা (এবং ঠিক একটাই) value পাবে যাতে $e^x = y$ হয়। কিন্তু $y \leq 0$ হলে x-এর এরকম কোনো value পাওয়া যাবে না। এই যে, $y > 0$ থেকে ঠিক একটাই x পাওয়া যাচ্ছে, এটাও কিন্তু একটা function. একে বলে **natural logarithm**, এবং লেখে $x = \log_e y$. এর গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 40-এ।
এইখানে এই অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ কথাটা মনে রেখো--

> $y = e^x$ হওয়া আর $x = \log_e y$ হওয়া একই কথা। সেই অর্থে e^x আর $\log_e x$ এরা যেন পরস্পরের বিপরীত function.

এরকম পরস্পর বিপরীত function-এর জোড়া অংকের দুনিয়ায় আরও দেখা যায়, যেমন "1 যোগ করা"-র বিপরীত হল "1 বিয়োগ করা", মানে function দিয়ে বললে $f(x) = x + 1$-এর বিপরীত হচ্ছে $g(x) = x - 1$. এরকম function-দেরকে বলে পরস্পরের **inverse function.** সুতরাং e^x আর $\log_e x$ হল পরস্পরের inverse. এ বিষয়ে কালকের শেষের দিকে আরো কিছু কথা বলব।

Exercise 18: বলো তো $e^{\log_e 5}$ কত? আর $\log_e e^5$-ই বা কত? এবার চট্ করে $f(x) = e^{\log_e x}$-এর গ্রাফটা এঁকে দাও তো! ■

e^x আর $\log_e x$ নিয়ে একটা জিনিস আছে, যেটা অনেকেই জানে না। এখানে সেটা বলে রাখি। ধরো যদি জিজ্ঞাসা করি a^2 মানে কী, তবে কী উত্তর দেবে? নিশ্চয়ই বলবে $a \times a$. একইভাবে a^3 মানে $a \times a \times a$. তবে কি a^b মানেই হল a-কে নিজের সাথে b-বার গুণ করা? যদি $3^{\sqrt{2}}$ বলি, তবে "3-কে নিজের সাথে $\sqrt{2}$-বার গুণ করা" বলার কোনো অর্থই হয় না! আসলে a^b জিনিসটার সংজ্ঞা দাঁড়িয়ে আছে e^x আর $\log_e x$-এর উপরে। সংজ্ঞাটা এইরকম--যদি $a > 0$ হয় আর b যেকোনো সংখ্যা হয়, তবে a^b মানে আসলে $e^{b \log_e a}$. হ্যাঁ, বিশ্বাস না হলেও এটাই অংকের জগতে a^b-এর সংজ্ঞা, যখন $a > 0$ আর b যেকোনো সংখ্যা। এই সংজ্ঞাটা এই বইতে আমাদের পরে কাজে লাগবে, তাই এই বেলা বলে রাখলাম।

DAY 3
গ্রাফ আঁকা (দ্বিতীয় পর্ব)

আমরা গতকাল থেকে বিভিন্ন function-এর গ্রাফ আঁকার একটা কায়দা শিখছি। এর দুটো ধাপ--

- প্রথম ধাপ হল কিছু পরিচিত function-এর গ্রাফ মনে রাখা। এই ধাপটা আমরা গতকাল শেষ করেছি।
- এবার দ্বিতীয় ধাপটা শিখব, যেখানে এই সব পরিচিত গ্রাফগুলোকে নাড়িয়েচাড়িয়ে আমরা নতুন নতুন function-দের গ্রাফ বানাব।

3.1 এদিক দিক সরানো

এর জন্য গ্রাফ কাগজটাকে একটা কম্পিউটারের পর্দা বলে ভাবলে সুবিধা হবে। সেই পর্দার উপরে একটা গ্রাফ আঁকা আছে, যেটাকে নাড়ানোচাড়ানো যায়।
কোনো পরিচিত গ্রাফকে নাড়িয়েচাড়িয়ে কীভাবে নতুন গ্রাফ বানানো যায় বলি শোনো--

- $f(x)$-এর গ্রাফকে ডানদিকে a ঘর সরালে পাওয়া যায় $f(x-a)$-র গ্রাফ।

যেমন ধরো e^{x-1}-এর গ্রাফ পাবে e^x-এর গ্রাফকে 1 ঘর ডানদিকে সরালে। যদি 1 ঘর বাঁদিকে সরাতে, তবে পেতে e^{x+1}-এর গ্রাফ। Fig 41 দ্যাখো।

- $f(x)$-এর গ্রাফকে উপরদিকে b ঘর তুললে পাওয়া যায় $f(x)+b$-এর গ্রাফ।

যেমন $3 + \sin x$-এর গ্রাফ আঁকতে হলে $\sin x$-এর গ্রাফটাকে 3 ঘর উপরে তুলে দিলেই হল। আবার $\sin x - 2$-এর গ্রাফ পাওয়া যাবে $\sin x$-এর গ্রাফকে 2 ঘর নামালেই। সাবধান, $\sin x - 2$ মানে কিন্তু $\sin(x-2)$ নয়, ওর মানে হল-- আগে $\sin x$ বার করে তা থেকে 2 বিয়োগ। Fig 42 দেখে নাও।

Fig 41

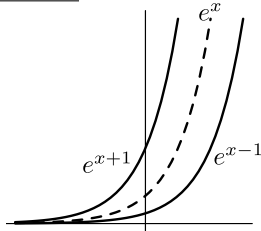



Fig 42

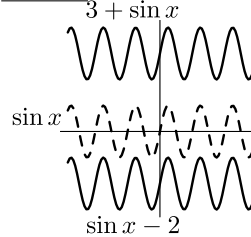
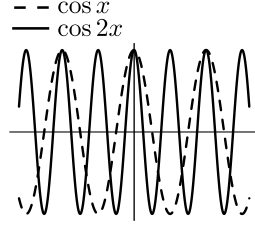



Fig 43

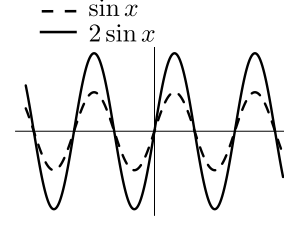



Fig 44

3.2 রোগা-মোটা, লম্বা-বেঁটে

এদিক ওদিক সরানো শিখেছি, এবার আরেক ধরণের পরিবর্তনের কায়দা শিখি--

- $f(x)$-এর গ্রাফকে horizontal দিক বরাবর c গুণ মোটা করে দিলে পাওয়া যায় $f(x/c)$-এর গ্রাফ।

ধরো বললাম $\cos 2x$-এর গ্রাফ আঁকতে। তবে $\cos x$-এর গ্রাফ নিয়ে শুরু করো, এবং সেটাকে $\frac{1}{2}$ গুণ মোটা করে দাও, অর্থাৎ কিনা রোগা করে অর্ধেক করে দাও। ব্যস্, $\cos 2x$-এর গ্রাফ পেয়ে যাবে! Fig 43 দেখলেই বুঝতে পারবে।

- $f(x)$-এর গ্রাফকে vertical দিকে টেনে d গুণ লম্বা করে দিলে পাওয়া যায় $d\,f(x)$-এর গ্রাফ।

$2\sin x$-এর গ্রাফ হল $\sin x$-এর গ্রাফই, খালি vertical দিকে টেনে ডবল লম্বা করে দেওয়া (Fig 44)। আবার $\frac{1}{2}\sin x$-এর গ্রাফ পেতে হলে থেবড়ে বেঁটে করে অর্ধেক করে দাও।

কোনো পরিচিত function-এর গ্রাফকে এইসব কায়দায় নাড়িয়ে চাড়িয়ে কী করে নতুন গ্রাফে পৌঁছনো যায়, সেটা এবার একটা উদাহরণ দিয়ে শেখা যাক।

Example 26: ধরো তোমাকে $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$-এর গ্রাফ আঁকতে বললাম। কীভাবে করবে?

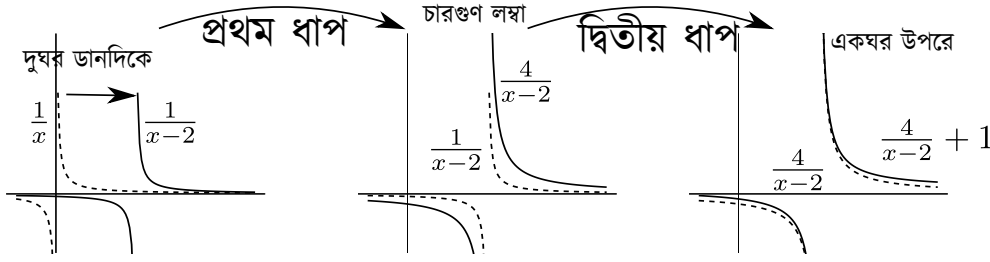
SOLUTION: প্রথমে দেখি কোন্ পরিচিত function-এর সাথে এর মিল পাওয়া যায়। আমাদের পরিচিত function-গুলো হল x, x^2, x^3 ইত্যাদি, $\frac{1}{x}$, তারপর $\sin x, \cos x, \tan x$ আর ওদিকে e^x এবং $\log_e x$.

এখানে $f(x)$-এর চেহারা দেখেই বুঝতে পারছ যে, $\sin x, \cos x, \tan x$ বা $e^x, \log_e x$-এর নামগন্ধ নেই। x^2, x^3 ইত্যাদিও লাগবে বলে মনে হচ্ছে না। কিন্তু এখানে একটা ভগ্নাংশের মত আছে, যেখানে নীচের তলায় x-ওয়ালা কিছু আছে। সুতরাং $\frac{1}{x}$ কাজে লাগতে পারে। দেখা যাক $\frac{1}{x}$-এর গ্রাফকে নাড়িয়েচাড়িয়ে $f(x)$-এর গ্রাফে পৌঁছনো যায় কিনা--

> কাক বলল, "দেখেই বোঝা যাচ্ছে অংকটা এল-সি-এম্‌ও নয়, জি-সি-এম্-ও নয়। সুতরাং হয় এটা ত্রৈরাশিকের অংক, না হয় ভগ্নাংশ।"
>
> --হ য ব র ল

$$f(x) = \frac{x-2+4}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}.$$

লক্ষ করো যে $\frac{1}{x}$-এর গ্রাফ-কে দুঘর ডানদিকে সরালেই $\frac{1}{x-2}$-এর গ্রাফ পেয়ে যাবে। সুতরাং দুইধাপে এগোই--

■

যেভাবে ধাপে ধাপে করলাম সেটা করা খুব একটা কঠিন নয়, কিন্তু প্রথম প্রথম ধাপগুলো ভেবে বার করা একটু কঠিন লাগতে পারে। নীচের গ্রাফটা এঁকে সড়গড় হয়ে নাও।

Exercise 19: $3\sin(2x-1)$-এর গ্রাফটা আঁকো।
HINT: প্রথমে $\sin x$-এর গ্রাফ এঁকে শুরু কর। তারপর $\sin(x-1)$-এ যাও। সেখান থেকে $\sin(2x-1)$. সবশেষে $3\sin(2x-1)$. ■

Example 27: Consider the functions $f_1(x) = x,\ f_2(x) = 2 + \log_e x,\ x > 0$ (where e is the base of natural logarithm). The graphs of the functions intersect

(A) once in $(0, 1)$ and never in $(1, \infty)$

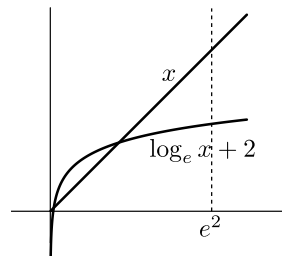
(B) once in $(0, 1)$ and once in (e^2, ∞)

(C) once in $(0, 1)$ and once in (e, e^2)

(D) more than twice in $(0, \infty)$.

(Bstat/Bmath2012short.3)
SOLUTION: এখানে একটা নতুন notation ব্যবহার করেছে। যদি $a < b$ দুটো সংখ্যা হয়, তবে (a, b) মানে হল সেই সব সংখ্যা x-এর set, যাতে $a < x < b$ হয়, মানে a থেকে b পর্যন্ত সব সংখ্যার set, খালি a, b বাদে। একইভাবে (a, ∞) মানে হল a-র চেয়ে বড় সব সংখ্যার set. এই notation-টা নিয়ে আমরা পরে আরো আলোচনা করব।
অংকটা দেখেই ঠিক বোঝা যাচ্ছে না কী করে আক্রমণ করা উচিত। এরকম অবস্থায় গ্রাফ দিয়ে ভাবলে সুবিধা হয়ে থাকে। প্রথমে $f_1(x) = x$-এর গ্রাফ আঁকো। তারপর $\log_e x$-এর গ্রাফটা এঁকে দুঘর উপরে তুলে দাও, তবে পাবে $f_2(x)$-এর গ্রাফ।

Fig 45

x
$\log_e x + 2$
e^2

সব মিলিয়ে দেখিয়েছি Fig 45-এর মত একটা ছবি। তবে এই ছবিটা আমি কম্পিউটার দিয়ে এঁকেছি। তাই খুব নিখুঁত হয়েছে। দেখেই ধাঁ করে বলে দেওয়া যাবে এখানে সঠিক উত্তরটা কী হবে। হাতে আঁকা গ্রাফ তো আর এত নিখুঁত হবে না। তাই আমাদের যুক্তির আশ্রয় নিতে হবে। প্রথমেই বুঝে নাও যে, $(0,1)$-এর মধ্যে একবার গ্রাফ দুটো পরস্পরকে intersect (অর্থাৎ ছেদ) করছে। এটুকু হাতে আঁকা ছবি থেকেই বোঝা যায়। আবার এইভাবেও ভাবতে পারো--

> যত 0-র কাছে যাবে ততই $f_2(x)$-টা $-\infty$-র দিকে যাচ্ছে, আর $f_1(x)$ যাচ্ছে 0-র দিকে। সুতরাং 0-র কাছে $f_1(x) > f_2(x)$ হবে। আবার $f_1(1) = 1 < f_2(1) = 2$. তার মানে $x = 1$-এ এসে f_2-র গ্রাফ উপরে উঠে গেছে। সুতরাং কোথাও একটা ওভারটেক করেছে।

এবার লক্ষ করো যে, f_1-এর গ্রাফটা একেবারে সটান একইভাবে উঠে চলেছে। ওদিকে f_2-এর গ্রাফটাও উঠছে, কিন্তু ক্রমশঃই নুয়ে পড়ছে। বুঝতেই পারছ যে, এরকম নুয়ে পড়তে পড়তে f_2-এর গ্রাফটা f_1-এর গ্রাফটাকে ফের intersect করবে। সুতরাং (A) বাদ হয়ে গেল। দ্বিতীয়বার intersect করার পর আর তৃতীয়বার যে intersect করতে পারবে না, সেটাও বোঝা যাচ্ছে, কারণ f_2-র গ্রাফটা নুয়েই চলবে, কোনো দিনই ফের মাথা তুলে f_1-এর সটান গ্রাফটার কাছে যেতে পারবে না। সুতরাং (D)-ও বাদ গেল। সুতরাং লড়াই (B) আর (C)-এর মধ্যে, মানে দ্বিতীয়বারের ছেদটা $x = e^2$-এর আগে হবে নাকি পরে। সেটা তো $f_1(e^2)$ আর $f_2(e^2)$-এর মধ্যে কে বড় সেটা পরীক্ষা করে দেখলেই বেরিয়ে যাবে। যদি $f_2(e^2) < f_1(e^2)$ হয়, তবে বুঝতে হবে $x = e^2$-এর আগেই f_2 নুয়ে পড়ে f_1-এর নীচে চলে গেছে। সুতরাং তাহলে (C)-টা উত্তর হয়ে যাবে। যদি $f_2(e^2) > f_1(e^2)$ হয়, তবে উত্তর হবে (B). লক্ষ করো যে, $f_1(e^2) = e^2$, যেটা প্রায় 9-এর কাছাকাছি (কারণ e প্রায় 3-এর কাছাকাছি)। ওদিকে $f_2(e^2) = 4$. সুতরাং $f_2(e^2) < f_1(e^2)$. ব্যস্, মার দিয়া কেল্লা, উত্তর হচ্ছে (C). ■

3.3 তিনরকমের ওল্টানো

অনেক সময়ে একটা গ্রাফকে "উল্টে" নতুন গ্রাফ বানানো যায়। এরকম তিনরকম ওল্টানোর কথা বলব এবার। Fig 46 দ্যাখো। ওল্টানো মানে প্রতিফলন। প্রথম ছবিটায় ওল্টানোটা উপর-নিচে, মানে x-axis বরাবর একটা আয়না কল্পনা করলে নীচের জিনিসটাকে প্রতিফলিত করে উপরে, আর উপরের জিনিসটাকে প্রতিফলিত করে নীচে পাঠিয়ে দেয়। দ্বিতীয়জনও একইরকম, খালি এবার আয়নাটা বসানো থাকে y-axis বরাবর। তৃতীয়জনের বেলায় আয়নাটা বসানো থাকে $45°$ লাইনটা বরাবর।
এবার অংকের ভাষায় এদের বর্ণনা করি। ধরো শুরু করেছি কোনো $f(x)$-এর গ্রাফ নিয়ে। তবে--

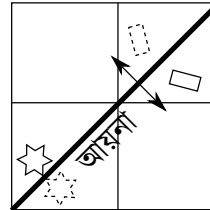
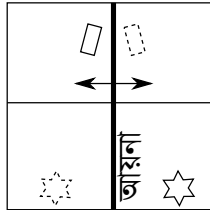
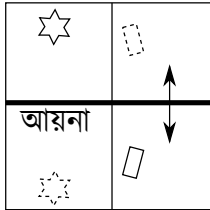
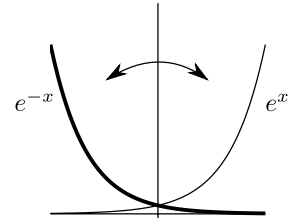
- ওপর-নীচে ওল্টালে পাবে $-f(x)$-এর গ্রাফ।
- বাঁদিক-ডানদিকে ওল্টালে হবে $f(-x)$-এর গ্রাফ।
- তৃতীয় ওল্টানোটা একটু জটিল। সেটা একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝাব একটু পরে।

Example 28: e^{-x}-এর গ্রাফটা আঁকো।

SOLUTION: আমরা e^x-এর গ্রাফ আঁকতে জানি। যদি e^x-কে $f(x)$ নাম দিই, তবে e^{-x} হয় $f(-x)$. সুতরাং e^x-এর গ্রাফটাকে y-axis বরাবর আয়না বসিয়ে প্রতিফলিত করে দিলেই হল। সেটাই দেখানো হয়েছে Fig 47-এ। ■

Fig 46

Fig 47

e^{-x} e^x

Exercise 20: $-e^x$-এর গ্রাফটা কীরকম হবে?
■

এবার $45°$ লাইন বরাবর ওল্টানোর প্রসঙ্গে আসি।

Example 29: Fig 48-এ আবার e^x-এর গ্রাফ দেখিয়েছি। যদি $45°$ লাইন বরাবর আয়না বসিয়ে ওল্টাই, তবে প্রতিফলিত হয়ে কী হবে, সেটাও দেখানো আছে। এই নতুন গ্রাফটা কি চেনা চেনা ঠেকছে?
SOLUTION: প্রতিফলনের ফলে যে নতুন গ্রাফটা পাওয়া গেল, সেটা একটু আগেই দেখেছি--$\log_e x$-এর গ্রাফ। মনে আছে নিশ্চয়ই যে, e^x হল $\log_e x$-এর inverse । অর্থাৎ $y = e^x$ হওয়া আর $x = \log_e y$ একই কথা। ■

$45°$ বরাবর ওল্টানোর ফলে কোনো function-এর গ্রাফ তার inverse-এর গ্রাফে পরিণত হয়, অবশ্য যদি inverse আদৌ থাকে। এই শেষের মন্তব্যটা ভালো করে বোঝা যাক, একটা উদাহরণ দিয়ে--

Example 30: Fig 49 দ্যাখো, $f(x) = x^2$-এর গ্রাফ এঁকেছি। এবার $45°$ লাইন বরাবর প্রতিফলিত করলে পাবে Fig 50-এর মত ছবি। এটা কি কোনো function-এর গ্রাফ?
SOLUTION: এটা কোনো function-এর গ্রাফ নয়, কারণ একটা vertical লাইন গ্রাফটাকে একাধিক জায়গায় ছেদ করে। সমস্যাটা কোথায় হচ্ছে, সেটা একটা উদাহরণ নিয়ে ভাবলেই বুঝবে। যেমন, 2 এবং -2 দুজনেরই square হল 4. তাই 4 থেকে উল্টো দিকে যেতে চাইলে কোথায় যাব বোঝা যাচ্ছে না, 2-তে নাকি -2-তে? তাই $f(x) = x^2$-এর inverse নেই। কোন্ কোন্ function-এর inverse থাকে না, সে বিষয়ে আমরা এই অধ্যায়ের শেষে বিস্তারিত আলোচনা করব। ■

3.4 আরো একটা কায়দা

কোনো গ্রাফকে পরিবর্তিত করে নতুন গ্রাফ বানাবার আরেকটা কায়দার কথা বলে শেষ করি। এর জন্য একটা নতুন notation শিখতে হবে, $|x|$ বা mod x বা absolute value of x. ব্যাপারটা এইরকম--যদি কোনো সংখ্যা নিয়ে তার চিহ্নটা ভুলে যাও, তবে যেটা পড়ে থাকে সেটাই তার **absolute value**. যেমন $|-5| = 5$, আবার $|5|$-ও হল 5.
এবার নতুন কায়দাটা কী করে তা শোনো। এটা $f(x)$-এর গ্রাফ থেকে $|f(x)|$-এর গ্রাফ বানায়, যেমন $\sin x$-এর গ্রাফ থেকে $|\sin x|$-এর গ্রাফ, এইরকম। কায়দাটা সহজ--প্রথমে দ্যাখো $f(x)$-এর গ্রাফের কোনো অংশ x-axis-এর নীচে আছে কিনা। যদি না থাকে তো ল্যাঠাই নেই, $f(x)$-এর গ্রাফটাই $|f(x)|$-এরও গ্রাফ। যদি কোনো অংশ x-axis-এর নীচে থাকে, তবে সেই অংশটুকুকে x-axis বরাবর প্রতিফলিত করে দাও (আর যে অংশটুকু আগে থেকেই x-axis-এর উপরে ছিল, সেটা যেমন ছিল রেখে দাও)। ব্যস্, অমনি $|f(x)|$-এর গ্রাফ পেয়ে যাবে। একটা উদাহরণ দেখি--

Example 31: $|x|$-এর গ্রাফ আঁকো।

SOLUTION: প্রথমে x-এর গ্রাফ এঁকে যে অংশটা x-axis-এর নীচে আছে সেটাকে x-axis বরাবর প্রতিফলিত করলেই পাবে $|x|$-এর গ্রাফ। Fig 51-এর মার্কামারা 'V' আকৃতির চেহারাটা ভুলো না যেন। বহু কাজে লাগে ওটা। ■

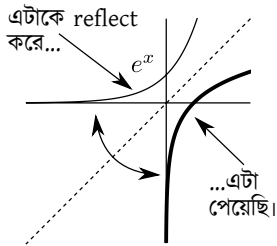
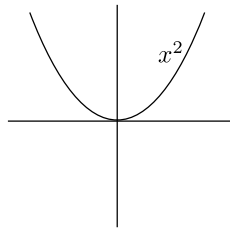
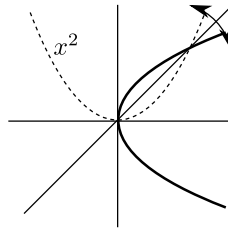
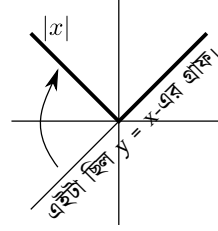
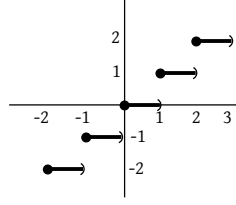



Fig 52

Exercise 21: $|\sin x|$-এর গ্রাফটা আঁকো দেখি, কেমন পারো!
■

Exercise 22: $|x|$-এর গ্রাফটা তো 'V'-এর মত, এবার একটা 'W'-এর মত দেখতে গ্রাফ আঁকতে দিই-- $f(x) = \big|\ |x| - 1\ \big|$, অর্থাৎ প্রথমে $|x| - 1$ বার করে তার আবার absolute value নেওয়া হয়েছে। যেমন $f(0) = \big|\ |0| - 1\ \big| = |-1| = 1$. চট্ করে $f(x)$-এর গ্রাফটা এঁকে ফ্যালো।
■

3.5 $[x]$

এবার একটা function-এর কথা বলব যেটা ক্যালকুলাস শেখার জন্য ভীষণ কিছু দরকারী নয়, কিন্তু যেটা বিভিন্ন পরীক্ষার প্রশ্নে প্রায়শঃই উঁকি দেয়। Function-টাকে লেখে $[x]$ আকারে, ছাত্রমহলে এর প্রচলিত নাম "**box** x", যদিও অংকের জগতে একে লোকে বলে **floor** function. এর সংজ্ঞাটা এইরকম--যদি x একটা integer হয়, তবে $[x]$ হল x নিজেই। যেমন $[2] = 2$ আর $[-5] = -5$. যদি x একটা integer না হয়, তবে $[x]$ হল x-এর আগের integer-টা। যেমন $[2.9] = 2$ এবং $[-5.1] = -6$. এইখানে সাবধান, $[-5.1]$ কিন্তু -5 নয়, কারণ -5 মোটেই -5.1-এর আগে আসে না। -5.1-এর আগের integer-টা হল -6.

Exercise 23: বার করো--
(i) $[4.3]$ (ii) $[-4.3]$ (iii) $[\sqrt{2}]$ ■

Exercise 24: যদি $n \neq 0$ একটা integer হয় (positive, negative যা খুশি), তবে $\left[\frac{1}{n}\right]$ কী কী value নিতে পারে? ■

$[x]$-এর গ্রাফটা আঁকা খুবই সহজ। তার আগে চট করে বলো তো $[x] = 0$ হলে x কী কী value নিতে পারে। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে উত্তর হল $0 \leq x < 1$. তাই এই সব value-র জন্য গ্রাফটা একটা horizontal লাইন হবে x-axis বরাবর। আবার $1 \leq x < 2$-এর জন্য আরেকটা horizontal লাইন পাবে, 1 উচ্চতায়। এইভাবে চলতে চলতে $[x]$-এর গ্রাফটা দাঁড়াবে Fig 52-এর মত। কেমন সিঁড়ির ধাপের মত দেখতে, তাই না? এরকম সিঁড়ির ধাপের মত function-দের অনেক সময়ে বলে **step function.** অবশ্য যে কোনো step function-এর বেলায় ধাপগুলো এরকম সমান সাইজের হয় না। এখানে প্রতিটা ধাপের বাঁদিকে একটা মোটা করে বিন্দু আর ডানদিকে খানিকটা গোল করে মুড়িয়ে দিয়েছি, লক্ষ করেছ? ওটা করেছি কেন বলি--যেমন ধরো, যে ধাপটা x-axis-এর সঙ্গে মিশে আছে, সেটার বিস্তার হল 0 থেকে 1 অব্ধি, মানে যখন $0 \leq x < 1$. এখানে বাঁদিকে আছে "$\leq$" আর ডানদিকে "$<$", সেটা তো গ্রাফে বোঝানো কঠিন, তাই বাঁদিকে বড় বিন্দু আর ডানদিকে মোড়ানোর ব্যবস্থা।

DAY 4
গ্রাফ আঁকা (তৃতীয় পর্ব)

এবার কিছু function-এর কথা আলোচনা করব যাদের গ্রাফ আঁকা সবসময়ে সহজ না হলেও, আদলটা মোটামুটি দিব্যি এঁকে ফেলা যায়। এবং আদলটুকু ব্যবহার করেই অনেক অংক করা যায়। এই প্রসঙ্গে প্রথমেই আসে **polynomial**-দের কথা। এরা অংকের জগতে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ হলেও ক্যালকুলাস শেখার জন্য ভীষণ জরুরী কিছু নয়। তাই মজা না লাগলে বাদ দিয়ে যেতে পারো। অবশ্য এই বইতে মাঝে মাঝেই ওদের দেখা মিলবে।

4.1 Polynomial

Polynomial-দের কিছু উদাহরণ দেখলেই চিনতে পারবে। যেমন $1-5x+6x^2$ বা $1+x+x^2+x^3$, বা $1+3x+x^5$, এইরকম। মানে x-এর কিছু power জুড়ে জুড়ে তৈরী। প্রত্যেকটা power-কে কোনো সংখ্যা দিয়ে গুণ করে সবগুলোকে একসঙ্গে যোগ করে দেওয়া হয়েছে। অর্থাৎ কিনা ওদের general চেহারাটা হল--

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

যেখানে $n \geq 0$ কোনো একটা integer, আর $a_0, ..., a_n$-রা হল বিভিন্ন সংখ্যা। এখানে কয়েকটা ভাষা শিখে রাখো--

- একটা polynomial-এ x-এর সবচেয়ে বড় power-টার উপরতলায় যে সংখ্যাটা আছে, তাকে বলে polynomial-টার **degree.** যেমন $1-5x+6x^2$-এর degree হল 2, কারণ এখানে সবচেয়ে বড় power-টা হল x^2, যার উপরতলায় রয়েছে 2.

- x-এর প্রতিটা power-কে একটা করে সংখ্যা দিয়ে গুণ করা হয়েছে, যাদেরকে $a_0, ..., a_n$ নাম দিয়েছিলাম। এদেরকে বলে এককেটা **coefficient.** যেমন, $1-5x+6x^2$-এর মধ্যে x-এর coefficient হল -5, আবার x^2-এর coefficient হল 6. একইভাবে প্রথম 1-টাকে বলব x^0-র coefficient. একে অনেক সময়ে polynomial-টার **constant term**-ও বলে।

- ধরো $p(x)$ একটা polynomial. তাহলে x-এর যে সব value-তে $p(x) = 0$ হয়, তাদেরকে বলে polynomial-টার এককেটা **zero** (অনেক সময়ে এদেরকে **root**-ও বলে)। যেমন $6-5x+x^2$-এর দুটো zero, তারা হল 2 আর 3, কারণ $6-5x+x^2 = (x-2)(x-3)$. যদি $p(x) = (x-2)^5(x-3)$ নিতাম, তাহলেও দুটোই zero হত, সেই 2 আর 3, কিন্তু এবার আমরা বলতাম যে 2 এসেছে পাঁচবার। আরেকটা অন্যরকম উদাহরণ দ্যাখো-- x^2+1-এর খালি দুটো zero, তারা হল **i** এবং **−i**. এরা দুজনেই complex number. অবশ্য গ্রাফ আঁকার জন্য **i**-ওয়ালা complex সংখ্যাদের নিয়ে মাথা ঘামাতে হবে না। কোনো polynomial-এর কী কী zero আছে (**i**-ওয়ালা complex number-দের বাদ দিয়ে) এবং তারা কে কবার করে এসেছে, সেটা জানলে গ্রাফ আঁকার কাজে বেশ সুবিধা হয়।

4.1.1 দুই প্রান্ত

Polynomial-দের গ্রাফ আঁকার সময়ে কয়েকটা জিনিস মনে রাখলে সুবিধা হবে। যদি degree-টা হয় 1 বা 0 তবে গ্রাফটা একটা সরলরেখা হবে, কারণ সেক্ষেত্রে polynomial-টাকে $mx+c$ আকারে লেখা যাবে। যদি degree≥ 2 হয়, তবে গ্রাফটা হবে ঢেউ-খেলানো মত, যার প্রান্ত দুটো সর্বদাই হয় উঠতে উঠতে মহাশূন্যে উঠবে, নয়তো নামতে নামতে অতলে তলিয়ে যাবে। দুটো এরকম গ্রাফ দেখিয়েছি Fig 53(a) আর Fig 53(b)-তে। দুই প্রান্তের আচরণ নির্ভর করবে polynomial-টার degree এবং সবচেয়ে বড় power-টার coefficient-এর চিহ্নের উপরে। সেটা কয়েকটা উদাহরণ দেখলেই বুঝবে।

Example 32: $3x^4 - 1000x^2$-এর গ্রাফে ডান দিকের প্রান্তের আচরণ কীরকম হবে, উঠতেই থাকবে, নাকি নামতেই থাকবে? আর বাঁদিকের প্রান্ত?

SOLUTION: ডানদিকের প্রান্ত মানে x যখন বেড়েই চলেছে, বেড়েই চলেছে। তখন x^4-ও বাড়ছে, তাই $3x^4$-ও বাড়ছে (যেহেতু $3 > 0$)। আবার $1000x^2$-ও বাড়ছে, ফলে $-1000x^2$ কমছে (যেহেতু $-1000 < 0$)। কিন্তু বুঝতেই পারছ যে, $3x^4$-টা $1000x^2$-এর চেয়ে অনেক তাড়াতাড়ি বাড়ছে, কারণ x^4-এর উপরতলায় 4 রয়েছে, আর x^2-এর উপরতলায় রয়েছে মোটে 2. তাই $-1000x^2$-এর বাধা কাটিয়ে $3x^4 - 1000x^2$-ও বাড়তেই থাকবে।

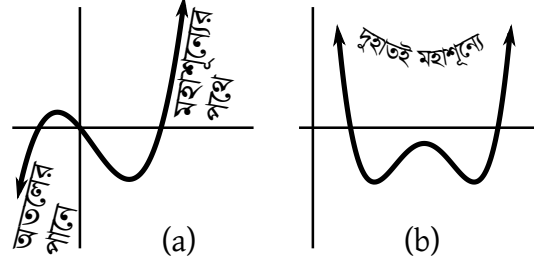



Fig 53

বাঁদিকের প্রান্ত মানে x যেখানে কমেই চলেছে, কমেই চলেছে। কমতে কমতে x-টা negative হয়ে গেলেও x^4-টা কিন্তু > 0-ই থাকবে (কারণ 4 হল even সংখ্যা)। সুতরাং যখন x কমতে কমতে বড় বড় negative সংখ্যা হবে, তখন $3x^4$-টা বড় বড় positive সংখ্যা হবে। এখানেও $-1000x^2$-এর ভূমিকা কিছু থাকবে না, কারণ উপরতলার 4-এর সুবাদে x^4-এর তেজ বেশী, x^2-এর তুলনায়। তাই বাঁদিকের প্রান্তটাও মহাশূন্যের দিকে উঠবে। ■

Example 33: $-3x^4 + 3x^3 + x$-এর দুইপ্রান্তের আচরণ কীরকম হবে?

SOLUTION: এখানেও আগের অংকের মতই x^4-ওয়ালা term-টারই তেজ সবচেয়ে বেশী, কারণ ওটাই এখানে x-এর সবচেয়ে বড় power. যেহেতু x^4-এর 4-টা হল even, তাই x যাই হোক, $x^4 \geq 0$ হবেই, ফলে $-3x^4 \leq 0$ হতে বাধ্য। তাই x খুব বড় বড় positive সংখ্যা হলে polynomial-টা খুব বড় বড় negative সংখ্যা value নেবে, আবার x খুব বড় বড় negative সংখ্যা হলেও polynomial-টা বড় বড় negative সংখ্যা value-ই নেবে। সুতরাং গ্রাফটার দুই প্রান্তই নামতে নামতে অতলে তলিয়ে যাবে। ■

এই দুটো অংকেই সবচেয়ে বড় power-এর উপরতলায় ছিল একটা even সংখ্যা। এবার দেখি সেখানে odd সংখ্যা থাকলে কী হত।

Example 34: $6x^5 + 3980x^2 + x + 5$-এর দুই প্রান্তের আচরণ কীরকম হবে?

SOLUTION: এখানে সবচেয়ে বড় power হল x^5, যার উপরতলায় আছে একটা odd সংখ্যা, 5. লক্ষ কর যে, x খুব বড় বড় positive সংখ্যা হলে x^5-ও খুব বড় বড় positive সংখ্যা হবে। আবার যদি x খুব বড় বড় negative সংখ্যা হয়, তবে x^5-ও বড় বড় negative সংখ্যা হবে। সুতরাং ডানপ্রান্তে x^5 মহাশূন্যে উঠে যাচ্ছে, আর বাঁপ্রান্তে অতলে তলিয়ে যাচ্ছে। যেহেতু x^5-এর coefficient-টা হল $6 > 0$, তাই $6x^5$-র আচরণও একইরকম হবে। Polynomial-টার বাকি term-গুলো নিয়ে মাথা ঘামানোর দরকার নেই, কারণ ওদের তেজ কম, x খুব বড় কিছু হলে (positive বা negative), ওদের প্রভাব x^5-এর তুলনায় নগণ্য হবে। সুতরাং, polynomial-টার গ্রাফটা ডানদিকে মহাশূন্যে উঠবে, বাঁদিকে অতলে তলিয়ে যাবে। ■

মোদ্দা কথাটা দাঁড়াচ্ছে এই--

> ডানদিকের প্রান্তের আচরণ: সবচেয়ে বড় power-এর coefficient-টা > 0 হলে ডান প্রান্তটা মহাশূন্যে উঠবে, < 0 হলে অতলে তলিয়ে যাবে। Degree-টা even নাকি odd, তাতে ডানদিকের প্রান্তের আচরণ বদলাবে না।
> বাঁদিকের প্রান্তের আচরণ: যদি degree-টা even হয়, তবে ডানদিকের প্রান্ত যা করবে, বাঁদিকও তাই-ই করবে। যদি degree-টা odd হয়, তবে বাঁদিকের প্রান্তটা ডানদিকের উল্টো আচরণ করবে।

এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে নীচের অংক কয়টা করো।

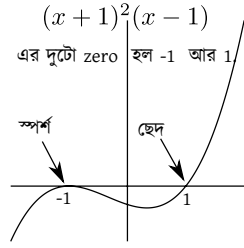
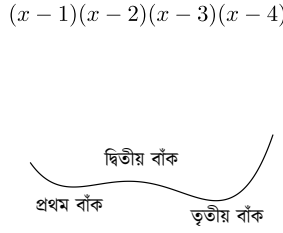
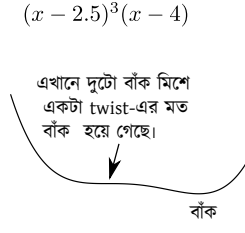
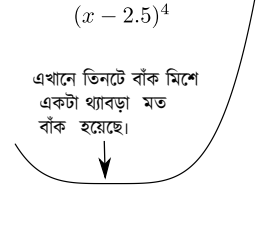



Fig 54 **Fig 55** **Fig 56** **Fig 57**

Exercise 25: বল তো, $-6x^5+3980x^2+x+5$-এর দুই প্রান্তের আচরণ কীরকম হবে! ■

Exercise 26: নীচের প্রতিক্ষেত্রে বাঁপ্রান্ত ও ডানপ্রান্তের আচরণ কী হবে?
(*i*) $x^3+x^2-1000x+1$ (*ii*) $-x^{10}+x^2-100x^4+x^9$ (*iii*) $x^3+x^4-1000x+1$ (*iv*) $4-3x$
■

দুইপ্রান্ত নিয়ে অনেক আলোচনা হল। । সেখানে মুখ্য ভূমিকা পালন করে সবচেয়ে বড় power-টা (এবং তার coefficient-এর চিহ্নটা)। এবার দেখব polynomial-টার zero-গুলো ওর গ্রাফের চেহারার পিছনে কী ভূমিকা পালন করে।

4.1.2 Zero

এটা বুঝতেই পারছ নিশ্চয়ই যে, zero-গুলোতে এসে গ্রাফটা x-axis-কে ছেদ বা স্পর্শ করবে (Fig 54)।
Zero-টা কতবার এসেছে, তার উপর নির্ভর করবে ছেদ করবে নাকি স্পর্শ করবে--

- যদি odd (বিজোড়) সংখ্যক বার আসে, তবে ছেদ করবে।
- যদি even-সংখ্যকবার আসে, তবে ছেদ করবে না, স্পর্শ করেই ফিরে যাবে।

4.1.3 কতগুলো বাঁক

কোনো polynomial-এর degree≥ 2 হলে তার গ্রাফ হয় ঢেউ খেলানো মত। এতে অন্ততঃ একটা বাঁক থাকবেই। আর সবচেয়ে বেশী সংখ্যক বাঁক হতে পারে degree-র চেয়ে এক কম। যেমন degree যদি 3 হয়, তবে বাঁকের সংখ্যা হতে পারে, 1 বা 2. একইভাবে degree$=4$ হলে বাঁকের সর্বোচ্চ সংখ্যা হতে পারে $4-1=3$, যেমন দেখিয়েছি Fig 55-এ। আসলে সবসময়েই degree-র চেয়ে ঠিক একটা কম বাঁকই থাকে, কিন্তু কোনো কোনো ক্ষেত্রে একাধিক বাঁক বাঁক একইজায়গায় পড়ে, ফলে ওদেরকে মিলিয়ে খালি একটাই বাঁক বলে মনে হয়। Fig 56 আর Fig 57 দেখলে ব্যাপারটা বুঝতে সুবিধা হবে।

4.1.4 Quadratic

এবার একটা বিশেষ ধরণের polynomial-এর কথা বলব, যাদের গ্রাফ আঁকা সহজ, এরা হল **quadratic** polynomial, মানে যাদের degree হল 2. কয়েকটা উদাহরণ হল x^2+x+1 বা x^2-5x+6 বা $-2x^2-5x+4$. আমরা ইতিমধ্যেই যা যা আলোচনা করেছি তা থেকেই এদের গ্রাফের চেহারাটা আন্দাজ করা যায়--

- যেহেতু degree হল 2 (একটা even সংখ্যা), তাই হয় দুইপ্রান্তই উপরে উঠে থাকবে, নয়তো দুই প্রান্তই নীচের দিকে যাবে।
- দুই প্রান্তই যেহেতু একই দিকে যাবে, তাই একটা বাঁক অন্ততঃ নিতেই হবে, এদিকে degree হল 2, তাই বাঁকের সংখ্যা $2-1=1$-এর চেয়ে বেশী হতে পারে না। তাই ঠিক একটাই বাঁক থাকবে।
- যদি polynomial-টার ফর্মুলা হয় ax^2+bx+c, তবে দুই প্রান্ত উপরে যাবে নাকি নীচে, সেটা ঠিক করে দেবে a-র চিহ্নটা। $a>0$ হলে উপরে যাবে, $a<0$ হলে নীচে।

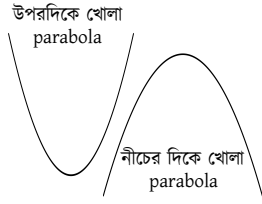
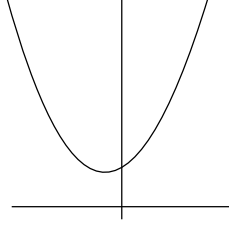
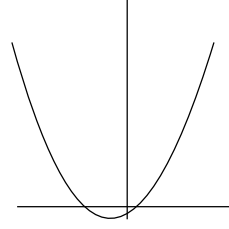
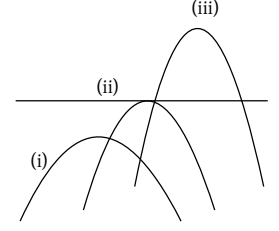



Fig 58 **Fig 59** **Fig 60** **Fig 61**

Quadratic polynomial-দের গ্রাফের চেহারাটার একটা নাম আছে--**parabola** (প্যারাবোলা)। কতকটা 'U' আর 'V'-এর মাঝামাঝি একটা চেহারা, বাঁকটা নেয় 'U'-এর মত করে, আর প্রান্তদুটো 'V'-এর মত ছড়িয়ে পড়ে। Fig 58 দেখে নাও। একটা quadratic polynomial-এর দুটো zero সম্ভব। যদি ফর্মুলাটা হয় ax^2+bx+c, তবে zero-দুটোর আচরণ নির্ভর করে b^2-4ac-এর উপরে, যার পোশাকি নাম হল **discriminant.**

- এইটা যদি >0 হয়, তবে দুটো zero থাকবে, যারা real number.
- যদি $=0$ হয়, তবে একটাই zero থাকবে, যেটা দুবার আসবে।
- আর যদি <0 হয়, তবে দুটো zero থাকবে, যারা complex number.

এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে নীচের অংক কটা দ্যাখো।

Example 35: মনে করো ax^2+bx+c-এর গ্রাফটা হল Fig 59-এর মত কোনো একটা parabola. এই ছবিটা দেখেই বলতে পারো b^2-4ac কীরকম হবে, positive, negative নাকি 0?
SOLUTION: যেহেতু parabola-টা x-axis-কে ছেদ বা স্পর্শ করে না, তার মানে ওটা x-এর কোনো real value-তেই 0 হয় না। তাই বুঝতেই পারছ যে $b^2-4ac<0$ হবে। ■

Example 36: মনে করো ax^2+bx+c-এর গ্রাফটা হল Fig 60-এর মত একটা parabola. এই ছবিটা দেখেই বলতে পারো b^2-4ac কীরকম হবে, positive, negative নাকি 0?
SOLUTION: আগের অংকটা বুঝে থাকলে এটাও বোঝা কঠিন নয় যে, এখানে $b^2-4ac>0$ হবে। ■

Exercise 27: এবার ধরো বলে দিলাম $b^2-4ac=0$. তাহলে ax^2+bx+c-এর গ্রাফ কীরকম হবে?
■

Exercise 28: Fig 61-এ তিনটে parabola-র ছবি আছে। এরা যে quadratic polynomial-এর গ্রাফ তাদেরকে যদি ax^2+bx+c আকারে লিখি, তবে প্রতি ক্ষেত্রে b^2-4ac কীরকম হবে, positive, negative নাকি 0? ■

4.2 বিবিধভারতী থেকে রেডিও মির্‌চি

যদি দুটো function দেওয়া থাকে $f(x)$ আর $g(x)$, যাদের দুজনের গ্রাফই তুমি জানো, তবে কি চট করে সেটা থেকে ওদের গুণফল $f(x)g(x)$-এর গ্রাফ এঁকে ফেলার কোনো কায়দা আছে? দুঃখের কথা যে, নেই! কিন্তু ওদের একজন যদি $\sin x$ বা $\cos x$ হয়, এবং অন্যজন বেশ ভদ্রগোছের হয়, তবে কিন্তু একটা কায়দা সম্ভব। ক্যালকুলাস শেখার জন্য এই কায়দাটা মোটেই

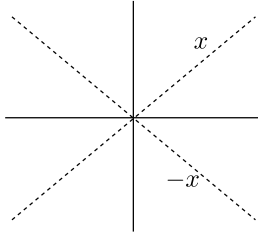
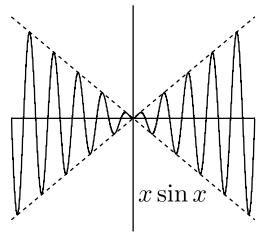
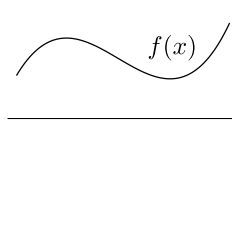
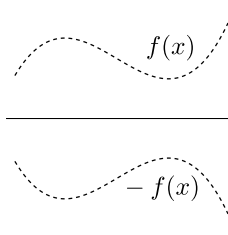



Fig 62 **Fig 63** **Fig 64** **Fig 65**

দরকারী কিছু নয়। তাও যে উল্লেখ করছি তার কারণ, এই কায়দায় মজাদার সব গ্রাফ পাওয়া যায়, যাদের কিছু গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ আছে physics-এ।

আমরা জানি যে, $\sin x$-এর গ্রাফ -1 থেকে 1-এর মধ্যে ঢেউয়ের মত ওঠানামা করে। যদি $5\sin x$-এর গ্রাফ নিই, তবে সেটা ওঠানামা করবে -5 থেকে 5-এর মধ্যে। একই যুক্তিতে যদি $f(x)\sin x$-এর গ্রাফ নিই, তবে তার ওঠানামা করা উচিত $-f(x)$ থেকে $f(x)$-এর মধ্যে। এই কথাটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা পড়।

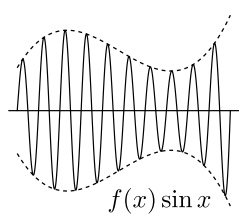
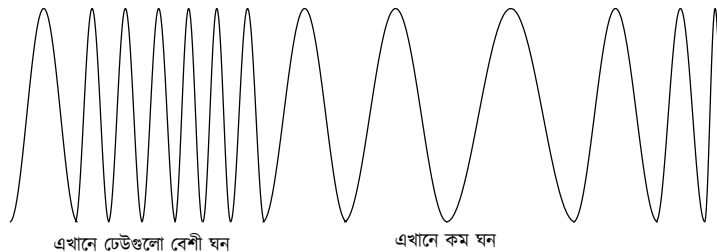
Example 37: $x\sin x$-এর গ্রাফটা কীরকম হবে?

SOLUTION: $x\sin x$ ওঠানামা করবে $-x$ থেকে x-এর মধ্যে। তাই প্রথমে x আর $-x$-এর গ্রাফ এঁকে নিই ড্যাশ্ ড্যাশ্ দিয়ে (Fig 62)। তারপর $\sin x$-এর মত ঢেউ এঁকে দিই ওই দুই সীমার মধ্যে (Fig 63)। ব্যস্! ■

সুতরাং যদি $f(x)$-এর গ্রাফ হয় Fig 64-এর মত, তবে $f(x)\sin x$-এর গ্রাফ আঁকার জন্য প্রথমে $f(x)$ আর $-f(x)$-এর গ্রাফ এঁকে নাও ড্যাশ্ ড্যাশ্ দিয়ে (Fig 65), তারপর ওদের মাঝে $\sin x$-এর ঢেউ ঢুকিয়ে দাও (Fig 66)। ঠিক এই কাজটাই করা হয় রেডিওতে। সেখানে $f(x)$ হল গান বা খবরের শব্দতরঙ্গ, যেটা সম্প্রচার করা হবে। আর $\sin x$-টা হল রেডিও তরঙ্গ। রেডিও তরঙ্গের এমন গুণ যে সেটা বহু দূরদূরান্তে পৌঁছে যেতে পারে, যেখানে শব্দতরঙ্গ পৌঁছতে পারত না। সেই কারণে শব্দতরঙ্গ $f(x)$-কে রেডিও তরঙ্গ $\sin x$-এর "ঘাড়ে চাপিয়ে দিয়ে" তৈরী হয় $f(x)\sin x$, যেটা অ্যানটেনা দিয়ে ছড়িয়ে দেওয়া হয়। এইবার তুমি যখন রেডিও শুনছ, তখন তোমার হাতের যন্ত্রটা মেপে দেখে $\sin x$-এর ঢেউগুলোর বিস্তার কতটা, এবং তা থেকে $f(x)$-টা পেয়ে যায় $\sin x$-এর "ঘাড় থেকে নামিয়ে"। এইভাবে একটা তরঙ্গকে আরেকটার "ঘাড়ে চাপানো"-কে বলে **modulation** আর "ঘাড় থেকে নামিয়ে আনা"-কে বলে **demodulation.** তোমার বাড়িতে যদি ইন্টারনেট থাকে, তবে কোথাও একটা modem নামে যন্ত্র বসানো আছে, এই যন্ত্রটা একাধারে MODulation এবং DEModulation করতে পারে বলেই ওর এই নাম হয়েছে।

অবশ্য এখানে বলে রাখি যে, একটা তরঙ্গকে আরেকটার ঘাড়ে চাপানোর আরও নানারকম কৌশল আছে। আমরা যেটা বর্ণনা করলাম, সেটাকে বলে amplitude modulation বা AM. আজকাল আরও বেশী জনপ্রিয় হল frequency modulation নামে আরেকটা কৌশল, যার সংক্ষিপ্তরূপটা বললেই ধাঁ করে চিনে ফেলবে--FM! এখানে $f(x)$ দিয়ে $\sin x$-কে গুণ না করে, $f(x)$-কে $\sin x$-এর পেটের মধ্যে কায়দা করে ঢুকিয়ে দেওয়া হয়। এর ফলে যে তরঙ্গটা তৈরী হয়, সেটা দেখতে Fig 67-এর মত। এখানে ওঠানামা সর্বদা -1 থেকে 1-এর মধ্যেই হচ্ছে, কিন্তু ঢেউগুলো কতটা ঘন সেটা বদলাচ্ছে $f(x)$-এর value-র উপর নির্ভর করে। ঢেউগুলো কত ঘন, তাকে বলে তার frequency, এবং সেটা থেকেই frequency modulation (FM)

Fig 66 **Fig 67**

$f(x)\sin x$

এখানে ঢেউগুলো বেশী ঘন

এখানে কম ঘন

কথাটার উৎপত্তি। যাই হোক, FM রেডিও নিয়ে আলোচনার জায়গা এটা নয়, কিন্তু একটা function-এর পেটে আরেকটা function-কে ঢুকিয়ে দেওয়াটা অংকের জগতে খুবই কাজে লাগে। একে বলে **composition**, যেটা আমাদের কালকের আলোচ্য বিষয়।

DAY 5
Composition

একটা function-কে আরেকটার পেটে ঢুকিয়ে দেওয়াকে বলে সেই দুটো function-এর composition করা। যেমন $\sin x$-এর পেটে x^2-কে ঢোকালে হবে $\sin x^2$. যদি x^2-এর পেটে ঢোকাতে $\sin x$-কে, তবে হত $(\sin x)^2$, যাকে সাধারণতঃ লেখে $\sin^2 x$. বুঝতেই পারছ যে, $\sin x^2$ আর $\sin^2 x$ মোটেই এক জিনিস নয়। Composition বোঝানোর একটা চিহ্ন আছে--যদি $f(x)$ আর $g(x)$ দুটো function হয়, তবে f-কে g-এর পেটে ঢোকালে পাবে $g(f(x))$. একে লিখব $g \circ f$. আবার g-কে f-এর পেটে ঢোকালে পাবে $f(g(x))$, যাকে লিখব $f \circ g$. লক্ষ করো যে, পেটের ভিতর যে ঢুকছে তাকে পরে লেখা হচ্ছে। এমন নিয়ম বানানোর কারণ হল $f(g(x))$ লেখার সময়ে আমরা f-এর ডানদিকে g লিখি, তাই $f \circ g$-তেও সেই ক্রমটা বজায় রাখা হয়েছে।
Composition-এর ব্যাপারটা অনেক ছাত্রেরই দেখেছি বুঝতে একটু অসুবিধা হয়। কয়েকটা অংক কষে গা গরম করে নেওয়া যাক। প্রথমে দেখব সহজ দিকটা--দুটো function দেওয়া থাকবে, তোমার কাজ হবে তাদের composition বার করা।

Example 38: ধরো $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2x+x^2}$ আর $g(x) = x+1$. তবে $f(g(x))$ বার করো।

SOLUTION: প্রথমে বাইরের function-টাকে (মানে এক্ষেত্রে $f(x)$-কে) লেখো, খালি যেখানে যেখানে x আছে সেখানে $()$ বসিয়ে--

$$\frac{1}{\sqrt{()}+2()+()^2}.$$

এবার ওই গোল ব্র্যাকেটগুলোর মধ্যে $g(x)$-এর ফর্মুলাটা (মানে $x+1$) ঢুকিয়ে দাও--

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)}+2(x+1)+(x+1)^2}.$$

এবার ভালো করে দেখলে লক্ষ করবে যে, সব জায়গায় আর গোল ব্র্যাকেটগুলোর দরকার নেই, যেমন $\sqrt{(x+1)}$-কে $\sqrt{x+1}$ লিখলেই বেশী সুন্দর লাগবে--

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+2(x+1)+(x+1)^2}.$$

■

এইভাবে x-এর জায়গায় প্রথমে $()$ লিখে তার মধ্যে $g(x)$-এর ফর্মুলা ঢোকানো, এই পুরো ব্যাপারটা একটু অভ্যাস হয়ে গেলেই একধাপে করে ফেলতে পারবে। নীচের অংকগুলো করে হাত পাকিয়ে নাও। এটা পরে বার বার কাজে লাগবে।

Exercise 29: প্রতিক্ষেত্রে $f(g(x))$ আর $g(f(x))$ বার করো।
(*i*) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x + e^x$. (*ii*) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2+1$. (*iii*) $f(x) = (x-1)(x-2)$, $g(x) = x^2+1$. (*iv*) $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$, $g(x) = x$. ■

এতক্ষণ composition-এর সহজ দিকটা শিখলাম, একটার পেটে আরেকটাকে ঢোকানো। এবার শিখব কঠিন দিকটা। একটা function দেওয়া থাকবে, সেটাকে দুটো function-এর composition হিসেবে ভেঙে লিখতে হবে।

Example 39: $\frac{1}{\sqrt{x^2+x-4}}$-কে দুটো function-এর composition হিসেবে লেখো।

SOLUTION: কাজটা নানাভাবে করা যায়। প্রথমে function-টাকে লেখো এবং মনে মনে ওর উপরে হাইলাইটার বুলিয়ে দাও, যাতে হাইলাইটারের বাইরে ওর কোনো x-ওয়ালা অংশ না থাকে। কাজটা নানাভাবে করা যায়। একভাবে হতে পারে এইরকম--

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x-4}}$$

এবার পুরো হাইলাইট করা অংশটাকে কপি করে তুলে নাও, এবং সেটাকে নাম দাও $g(x)$. যেমন এখানে আমরা নেব $g(x) = x^2 + x$. এবার আবার মূল function-টায় ফিরে এসে পুরো হাইলাইট করা জায়গাটা মুছে সেখানে খালি একটা x লিখে দাও। ফলে যে function-টা পেলে তাকে বলো $f(x)$. আমাদের বেলায় $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$. ব্যস্, আমাদের মূল function-টা তার মানে হল $f(g(x))$.
চাইলে হাইলাইটটা এভাবেও করতে পারতে--

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x-4}}$$

তাহলে পেতে $g(x) = x^2 + x - 4$ আর $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. যদি হাইলাইটের সাম্রাজ্য আরো বাড়াতে তবে পেতে

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x-4}}$$

সেক্ষেত্রে হত $g(x) = \sqrt{x^2+x-4}$ আর $f(x) = \frac{1}{x}$.
বুঝতেই পারছ যে, হাইলাইটের সাম্রাজ্য যতই বাড়বে ততই $g(x)$-টা জটিলতর হয়ে উঠবে, আর $f(x)$-টা সহজ হয়ে উঠবে। তাই অনেকসময়েই বুদ্ধিমানের কাজ হল হাইলাইটের পরিমাণটাকে মাঝামাঝি কিছু রাখা, যাতে মূল function-এর জটিলতাটা $f(x)$ আর $g(x)$-এর মধ্যে মোটামুটি সমান সমানভাবে ভাগ হয়ে যায়।
হাইলাইট করার সময়ে দুটো ব্যাপারে সাবধান। এক, এরকম কিছু করে বোসো না--

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x-4}}$$

এখানে খানিকটা x হাইলাইটের বাইরে রয়ে গেছে। দুই, যেটাকে হাইলাইট করছ সেটা যেন পুরোটাই হাইলাইটের মধ্যে থাকে। যেমন এরকম করলে--

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x-4}}$$

x^2-এর উপরের 2-টা বাদ পড়েছে, অথচ পরের $+x$-টা ঢুকে পড়েছে। সেটা চলবে না। ■

Exercise 30: প্রতি ক্ষেত্রে একটা করে function দেওয়া আছে। এমনভাবে $f(x)$ আর $g(x)$ তৈরী করো, যাতে function-টা $f(g(x))$ হয়। প্রতি ক্ষেত্রেই একাধিক উত্তর সম্ভব। চেষ্টা কোরো যেন $f(x)$ বা $g(x)$ দুজনেই মূল function-টার তুলনায় সহজতর দেখতে হয়।

(i) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (ii) $\sin(2x^2-5x+2)$ (iii) $\sqrt{\frac{1}{x+3}}$ (iv) $(\sin^2 x+1)^3$
■

এক ধরণের function আছে, যাদেরকে দুটো function-এর composition হিসেবে লেখা খুব সহজ। এদের বেলায় x-টা সব সময়েই কোনো একটা বিশেষ চেহারায় থাকে। একটা উদাহরণ দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 40: $(\sin x)^2+2\sin x-7$-কে দুটো function-এর composition হিসেবে লেখো।

SOLUTION: এখানে x সর্বদাই $\sin x$ আকারে আছে। তাই $g(x)=\sin x$ নেব। এবার function-টায় যেখানে যেখানে $\sin x$ আছে, সেখানে $\sin x$-এর জায়গায় x বসিয়ে দিলেই যেটা পাবে তাকে $f(x)$ বলো, মানে $f(x)=x^2+2x-7$. ব্যস্, আমাদের function-টা হল $f(g(x))$. ■

Exercise 31: প্রতি ক্ষেত্রে একটা করে function দেওয়া আছে। এমনভাবে $f(x)$ আর $g(x)$ তৈরী করো, যাতে function-টা $f(g(x))$ হয়।
(i) $\frac{e^x+1}{e^x-1}$. (ii) $\sin x+\cos^2 x+1$. (iii) $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. (iv) x^4+3x^2+4
■

Exercise 32: Let $\mathbb{R}$ be the set of real numbers, and the functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined by $f(x)=x^2+2x-3$ and $g(x)=x+1$. Then the value of x for which $f(g(x))=g(f(x))$ is

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(JEE2012)
HINT:
এখানে একটা নতুন notation দিয়েছে $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. এর মানেটা বুঝে নেওয়া যাক। আমরা function বোঝানোর সময়ে ব্যাপারটাকে একটা যন্ত্রের সঙ্গে উপমা দিয়েছিলাম, মনে আছে? সেখানে f ছিল যেন একটা যন্ত্র, যার মধ্যে x ইনপুট দিলে $f(x)$ বেরিয়ে আসে আউটপুট হিসেবে। এখানে "$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$"-এর মানে হল ইনপুট x-টার value যেকোনো real number হতে পারে, এবং তখন আউটপুট $f(x)$-টাও একটা real number হবে। তীরচিহ্নটার বাঁদিকের $\mathbb{R}$-টা ইনপুট x-এর জন্য, এবং ডানদিকের $\mathbb{R}$-টা আউটপুট $f(x)$-এর জন্য।
এখানে $f(g(x))=(x+1)^2+2(x+1)-3=x^2+4x$, আর $g(f(x))=x^2+2x-3+1=x^2+2x-2$. তোমাকে দেখতে হবে কখন এরা সমান হয়, মানে $x^2+4x=x^2+2x-2$ হয়। এবার নিশ্চয়ই উত্তরটা কী হবে বুঝতে অসুবিধা নেই? ■

Example 41: Let the functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, and $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined by $f(x)=\cos x$, $g(x)=2x+1$ and $h(x)=x^3-x-6$. Find the mapping $h\circ(g\circ f)$. Hence find the value of $h\circ(g\circ f)(x)$ when $x=\frac{\pi}{3}$ and $x=\frac{2\pi}{3}$.[4] **(HS2015)**
SOLUTION:

✎$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2\cos x+1$.
$(h\circ(g\circ f))(x)=h(g(f(x)))=h(2\cos x+1)=(2\cos x+1)^3-(2\cos x+1)-6=8\cos^3 x+12\cos^2 x+4\cos x-6$.
We know that $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

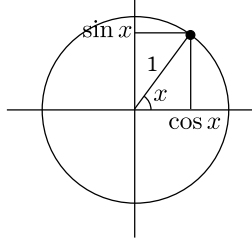



Fig 68

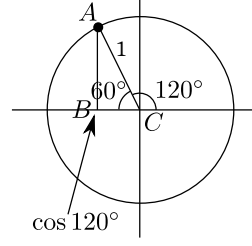



Fig 69

So $(h \circ (g \circ f))\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cdots = -\frac{3}{2}$.

Also, we know that $\cos \frac{2\pi}{3} = -1$.

এটা কী করে ফস্ করে বার করে ফেললাম? না, মুখস্থ করে করিনি, ছবি ব্যবহার করে করেছি--

> $\sin x$ আর $\cos x$-এর সংজ্ঞার ছবিটা কী ছিল মনে আছে তো? না থাকলে Fig 68 দেখে নাও। এবার $\frac{2\pi}{3}$ রেডিয়ান মানে হল গিয়ে $120°$. তাহলে ছবিটা পাবে Fig 69-এর মত। ওই right angled triangle-টা তোমার অপরিচিত হবার কথা নয়। ওখানে BC-র দৈর্ঘ্য হল $\frac{1}{2}$, আর B রয়েছে C-র বাঁদিকে। তাই x-axis বরাবর B-র অবস্থান হল $-\frac{1}{2}$, এবং সেটাই হল $\cos \frac{2\pi}{3}$.

একটু অভ্যাস করে নিলেই এরকম ছবি এঁকে বার করা সহজ হয়ে আসবে। এতে ভুল হবার সম্ভাবনাও মুখস্থ করার চেয়ে কম থাকে। যাই হোক, এবার আমাদের অংকে ফিরে আসি।

✎So $(h \circ (g \circ f))\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cdots = -1$.

এখানে ডট্ ডট্ অংশটুকু তোমার করার জন্য রেখে দিয়েছি। এখানে একটা ব্যাপার বলে রাখি--অংকটায় আমাদেরকে প্রথমে $h \circ (g \circ f)$ বার করে বলেছিল, এবং সেটাকে ব্যবহার করে $(h \circ (g \circ f))\left(\frac{\pi}{3}\right)$ আর $(h \circ (g \circ f))\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ বার করতে দিয়েছিল। তাই অংকটা লম্বা হয়েছে। যদি খালি $(h \circ (g \circ f))\left(\frac{\pi}{3}\right)$ আর $(h \circ (g \circ f))\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ বার করতে দিত, তবে কিন্তু প্রথমে $h \circ (g \circ f)$ বার করে নেবার কোনোই দরকার নেই। তখন প্রথমে $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ আর $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ বার করে তাদেরকে একে একে g-এর পেটে ঢোকাতাম, এবং এর ফলে যা পাওয়া যেত, তাদেরকে একে একে h-এর পেটে ঢোকাতাম। ফলে পুরো অংকটাই খালি সংখ্যা নাড়াচাড়া করেই হত, x নিয়ে কাজ করতে হত না। ■

Example 42: Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers and for all $x \in \mathbb{R}$, the mapping $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = ax + 2$. If $f \circ f = I_{\mathbb{R}}$, then find the value of a.[2] **(HS2016.1a)**

SOLUTION: এখানে একটা চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে $I_{\mathbb{R}}$, যেটা খুব প্রচলিত চিহ্ন নয়। এর মানে এমন একটা function যেটা ইনপুটটাকেই সরাসরি আউটপুট হিসেবে বার করে দেয়, মানে তুমি যাই $x \in \mathbb{R}$ নাও না কেন, $I_{\mathbb{R}}(x) = x$ হবে! এই চিহ্নটা বুঝে গেলে অংকটা সোজাই। প্রথম কাজ হল $f \circ f$ বার করা, মানে f-এর পেটে f ঢোকানো।

✎$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = af(x) + 2 = a(ax + 2) + 2 = a^2x + 2a + 2$.

For $f \circ f = I_{\mathbb{R}}$, we need $(f \circ f)(x) \equiv I_{\mathbb{R}}(x) \equiv x$.

এখানে $\equiv$ লিখেছি, মানে এটা সব x-এর জন্যই খাটে।

✎So we need $a^2x + 2a + 2 \equiv x$.

a-র কোন value-র জন্য এটা খাটবে? একটা সহজ কায়দা হল x-এর যা খুশি একটা value বসিয়ে দেখা, যেমন ধরো $x = 1$ বসালে হয়--

✎Putting $x = 1,\ 2a + 2 = 0,$ or $a = -1.$

x-এর বাকি সব value-র জন্যও এটা কাজ করবে তো? অবশ্যই, কারণ $a = -1$ হলে $a^2x + 2a + 2 = x$ হয়, তা সে তুমি x-এর যাই value নাও না কেন।

✎For $a = -1$ we have $a^2x + 2a + 2 \equiv x,$ as required.
So the answer is $a = -1.$

■

Exercise 33: Let $f(x) = 2^{100}x + 1$ and $g(x) = 3^{100}x + 1$. Then the set of real numbers x such that $f(g(x)) = x$ is

(A) empty

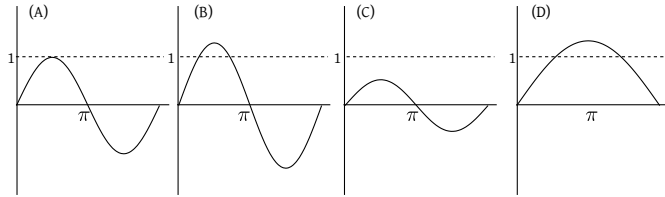
(B) singleton

(C) a finite set with more than one elements

(D) infinite.

(JEE2013.3)
HINT:
সরাসরি $f(g(x))$ বার করেই ফ্যালো। দেখবে $f(g(x)) = mx + c$ চেহারার কিছু একটা হচ্ছে, যেখানে m আর যাই হোক, 1 অন্ততঃ নয়। এবার $mx + c = x$ সমাধান করলে x-এর কটা value সম্ভব? ■

ISI-এর B.Stat./B.Math-এর entrance পরীক্ষায় একটা অংক এসেছিল, নীচের অংকটা তারই অনুকরণে। আসল অংকটার জন্য আরো কিছু হাতিয়ার লাগবে, সেগুলো এখনো আমাদের হাতে নেই। যখন সেসব শিখব, তখন সেই অংকটা দেব। আপাততঃ এই নকল অংকটা দিয়ে দুধের স্বাদ ঘোলে মেটানো যাক।

Example 43: Which of the following is the closest to the graph of $\tan(\sin x),\ x > 0$?

SOLUTION: এখানে ছবিতে x-কে 0 থেকে 2π পর্যন্ত দেখানো হয়েছে। প্রথমেই চিন্তা করে নাও x-এর এইসব value-র জন্য $\sin x$ কী কী value নিতে পারে। গ্রাফ দিয়ে ভাবলেই দেখবে -1 থেকে 1 পর্যন্ত সব value-ই নেয়। সুতরাং $\tan(\sin x)$-এর আচরণ বোঝার জন্য $\tan x$-এর গ্রাফটা ভাবতে হবে, যেখানে x রয়েছে -1 থেকে 1-এর মধ্যে। এই অংশটা মোটা করে দেখিয়েছি Fig 70-এ। লক্ষ করো, এটা positive আর negative দু রকম value-ই নিচ্ছে (যেহেতু মোটা

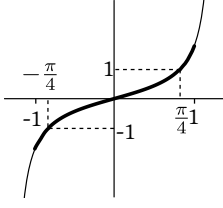
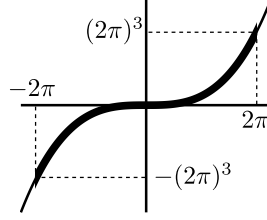
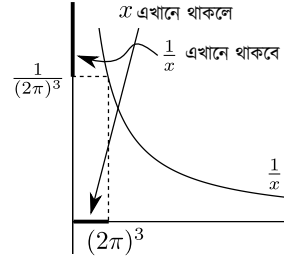



Fig 70 **Fig 71** **Fig 72**

অংশটা খানিকটা x-axis-এর নীচে আর খানিকটা x-axis-এর উপরে রয়েছে)। সুতরাং (D) হতে পারে না। এবার লক্ষ করো যে, (A),(B) আর (C)-এর গ্রাফগুলোর আদল একইরকম, পার্থক্য খালি একটা ব্যাপারে, ঢেউটা কতটা উঠেছে, 1-এর বেশী, নাকি কম, নাকি সমান। আবার Fig 70-র দিকে তাকাও। মনে রেখো যে $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, আর $\pi \approx 3.14$. তাই $\frac{\pi}{4} < 1$. সুতরাং মোটা অংশটা 1-এর থেকে একটু বেশী উপরে উঠবে। এই জায়গাটা ভালো করে ভেবে ছবি দিয়ে বুঝে নাও। তাহলেই আর সন্দেহ থাকবে না যে, উত্তর হবে (B). ■

Example 44: In the interval $(0, 2\pi)$, the function $\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$

(A) never changes sign

(B) changes sign only once

(C) changes sign more than once, but finitely many times

(D) changes sign infinitely many times.

(BStat/BMath2015)

SOLUTION:

এখানে একটা নতুন ভাষা আছে--"interval $(0, 2\pi)$"। এর মানে সেই সব সংখ্যা x-এর set, যারা $0 < x < 2\pi$. এই ভাষাটা আরো গুছিয়ে আমরা কালকে শিখব। আপাততঃ, এই অংকটা বুঝে নাও--যদি x-টা 0 থেকে 2π অব্ধি যায়, তবে $\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$-এর আচরণ কীরকম হবে, তা নিয়েই এখানে আমাদের আগ্রহ।

এই অংকটাকে গ্রাফ দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। এটাকে $\sin y$ বলে ভাবো যেখানে $y = \frac{1}{x^3}$. এবার ধাপে ধাপে এগোব--

1. যখন $x \in (0, 2\pi)$ হবে, তখন x^3 থাকবে 0 থেকে $(2\pi)^3$-এর মধ্যে (Fig 71)।
2. তাই $y = \frac{1}{x^3}$-টা $\frac{1}{(2\pi)^3}$-এর চেয়ে বড় সব value নিতে পারবে (Fig 72)।
3. যখন y এইসব value নেবে, তখন $\sin y$ কী করবে, সেটা sin-এর গ্রাফটা কল্পনা করলেই বুঝবে। গ্রাফটা ঢেউয়ের মত ক্রমাগতই ওঠানামা করে চলেছে। প্রতিটা ঢেউয়ে খানিকক্ষণ positive থাকছে, খানিকক্ষণ negative. এবং এটা হয়েই চলেছে, হয়েই চলেছে, হয়েই চলেছে...

বুঝতেই পারছ যে উত্তরটা (D) না হয়ে যায় না! ■

আমরা এক্ষুণি বললাম যে, $x \in (0, 2\pi)$ হলে $x^3 \in (0, (2\pi)^3)$ হবেই। এখানে x-এর interval-টার দুইপ্রান্তের cube নিলেই x^3-এর interval হয়ে গেল। এমনটা হল কারণ $(0, 2\pi)$-এর উপরে x^3-এর গ্রাফটা সবসময়েই উঠছে (মানে x বাড়লেই x^3-ও বাড়ছে)। যদি তা না হত, তবে কিন্তু হত না। নীচের অংকটা সেটা নিয়েই।

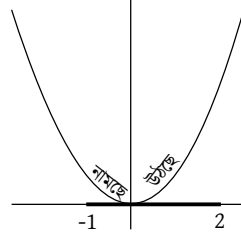
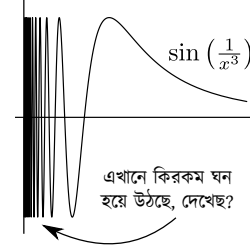



Fig 73 **Fig 74**

Exercise 34: Fig 73-এর দিকে তাকিয়ে বলো $x \in [-1, 2]$ হলে $x^2 \in [(-1)^2, 2^2]$ হবে কিনা। ■

এই প্রসঙ্গে বলে রাখি $\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$-এর গ্রাফটা কীরকম হবে। এক্ষুণি আমরা দেখলাম যে $(0, 2\pi)$-এর মধ্যে ওর infinite-সংখ্যক ঢেউ চেপে ঢোকানো আছে। ফলে ছবিটা হবে Fig 74-এর মত। যতই x-টা 2π-এর থেকে 0 দিকে যাচ্ছে, ততই $\frac{1}{x^3}$-টা হুড়মুড়িয়ে বাড়ছে, ফলে তার sin-টা ততই ঘন ঘন ওঠানামা করেই চলেছে।

DAY 6
একগুচ্ছ নতুন কথা (প্রথম পর্ব)

Function-দের নিয়ে কাজ করার সময়ে অনেকগুলো নতুন কথা শুনবে। তাদের সঙ্গে এই বেলা পরিচয় করে নেওয়া যাক।

6.1 Domain

আমরা বলেছি যে, $f(x)$-এর একটা ফর্মুলা দেওয়া থাকলে, তার মধ্যে x-এর যা খুশি value বসালেই চলে না। তার জন্য অনেক সময়ে কিছু শর্ত লাগে। যেমন, $f(x) = \frac{1}{x}$ হলে $x = 0$ বসানো চলবে না। অতএব এখানে এই শর্তটা চাই-- $x \neq 0$. আবার $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$ হলে শর্তটা হত $x \neq 1, 2$.

কোনো function যদি দেওয়া থাকে $f(x)$, তবে তার জন্য জন্য এইরকম সব শর্ত মেনে x-এর যে সব value পাওয়া যায়, তাদের set-কে বলে সেই $f(x)$-এর **domain.** এর বাইরে x-এর কোনো value নিলে সেখানে $f(x)$ হবে undefined. আমরা এখানে real number-দের নিয়ে কাজ করছি। যাবতীয় real number-এর set-কে লেখে $\mathbb{R}$. সেটা আমরা আগেই দেখেছি। যখন আমরা আরও বাড়তি শর্ত চাপাব (যেমন $x \neq 0$ বা $x \neq 1, 2$) তখন আমরা $\mathbb{R}$-এর বিভিন্ন subset পাব। এদেরকে সহজে লিখে প্রকাশ করার জন্য কিছু notation আছে। সেগুলো একটু জেনে নিই। তবে পরের আলোচনাগুলো করতে সুবিধা হবে।

6.1.1 কিছু notation

ধরো তুমি $\frac{1}{x}$-এর domain-টা লিখতে চাও। এটা হল সেই সব real number-দের set যারা 0 নয়। এটাকে লিখব--

$$\{x \in \mathbb{R} \;:\; x \neq 0\}.$$

একে বলে **set-builder notation**. চেহারাটা হল

$$\{x \in \text{কোথায় আছে} : \text{বিভিন্ন শর্ত}\}.$$

আমরা যেহেতু real number-দের নিয়ে কাজ করব, তাই এই বইতে "কোথায় আছে"-টা হবে $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$-কে একটা লম্বা লাইন বলে কল্পনা করা যায়। এই লাইনের একটানা কোনো অংশ নিলে তাকে বলে একটা **interval,** যেমন 3 থেকে 5 অব্ধি সব সংখ্যা নিলে

$$\{x \in \mathbb{R} \;:\; 3 \leq x \leq 5\}.$$

একে সংক্ষেপে লেখে $[3,5]$. লক্ষ করো যে, এর মধ্যে 3 এবং 5 দুজনেই আছে। চাইলে তুমি ওদের বাইরে রাখতে পারো, তাহলেও একটা interval পাবে--

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3 < x < 5\}.$$

একে লেখে $(3,5)$. যদি খালি 3-কে বাইরে রাখতে চাও, সেটাও একটা interval হবে--

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3 < x \leq 5\}.$$

এবার সংক্ষেপে লিখব $(3,5]$.

Exercise 35: যদি 3-কে ভেতরে রেখে 5-কে বাইরে রাখতাম, মানে $\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3 \leq x < 5\}$ নিতাম, তবে আন্দাজ কর তো সংক্ষেপে কী লিখতে হবে। ■

গোল ব্র্যাকেট, চৌকো ব্র্যাকেট মিলিয়ে আমরা চার রকমের interval শিখলাম। এবার আরো দুইরকমের কথা শিখি। ধরো এই interval-টা

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 3\},$$

মানে 3-এর চেয়ে বড় সব সংখ্যার set. এই interval-টা বাঁদিকে 3 অবধি গেছে। ডানদিকে কোনো প্রান্তই নেই, চলছে তো চলছেই। একে লেখে $(3,\infty)$. এখানে ∞ (ইন্‌ফিনিটি) মানে হল "ডানদিকে চলছে তো চলছেই"। যদি 3-কে আমাদের interval-এর ভিতরে রাখতে চাইতাম, মানে

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 3\},$$

তবে লিখতাম $[3,\infty)$. যদি 3-এর চেয়ে ছোটো সব সংখ্যার set বোঝাতে চাই, মানে

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 3\},$$

তবে লিখব $(-\infty,3)$.
একটা কথা মনে রেখো--যেহেতু ∞ বা $-\infty$ কোনো সংখ্যা নয়, তাই ওদের সঙ্গে কখনোই আমরা চৌকো ব্র্যাকেট ব্যবহার করব না, মানে $(3,\infty]$ বা $[-\infty,6]$, এইরকম লিখব না।

Exercise 36: আন্দাজ করো এই কটা notation-এর মানে কী--
(*i*) $(-\infty,5)$ (*ii*) $(-\infty,50]$ (*iii*) $(-\infty,\infty)$. ■

Interval-গুলো $\mathbb{R}$-এর খুব গুরুত্বপূর্ণ subset. আরেকটা গুরুত্বপূর্ণ subset হল যাবতীয় integer-দের set, যার notation হল $\mathbb{Z}$. যদি খালি positive integer-দের রাখতে চাও (মানে $1,2,3,...$), তবে notation-টা হল $\mathbb{N}$. এদের বলে **natural number.** এরকম আরেকটা notation আছে $\mathbb{Q}$. এটা হল সেইসব সংখ্যাদের set যাদেরকে $\frac{m}{n}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে $m,n \in \mathbb{Z}$ এবং $n \neq 0$. এইসব সংখ্যাদের বলে **rational**. উদাহরণ $\frac{1}{3}, \frac{25}{5}, \frac{-45}{7}$, এইসব। এরা কেন গুরুত্বপূর্ণ সেই প্রসঙ্গে এখন যাব না।
নানারকম notation শেখা হল। আবার domain-এর কথায় ফিরি। কোনো function-এর ফর্মুলা বা গ্রাফ দেওয়া থাকলে তার domain কী করে বুঝে ফেলতে হয়, সেগুলোই এবার আমরা শিখব।

6.1.2 ফর্মুলা থেকে domain বোঝা

আমরা ইতিমধ্যে যেসব function-দের কথা শিখেছি তাদের domain-গুলো জেনে রাখা ভালো।

Example 45: এই function-গুলোর domain কী হবে?

(*i*) $\sin x$ (*ii*) $\tan x$
SOLUTION: (i) চাকার অ্যানিমেশন দিয়ে ভাবলেই বুঝবে যে, x-এর যে কোনো value-তেই $\sin x$ বার করা যায়। কারণ x মানে চাকাটা কতটা ঘোরানো হচ্ছে। আর যতটাই ঘোরাও না কেন, P বিন্দুটার তো কিছু একটা অবস্থান পাবেই,

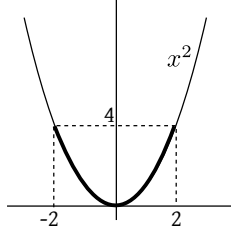
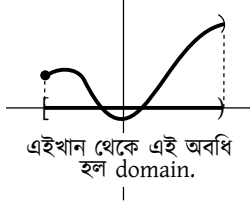
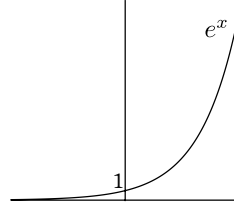
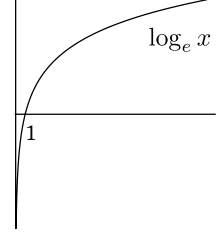



Fig 75 **Fig 76** **Fig 77** **Fig 78**

(a, b). সেই b-টাই হল $\sin x$. যেহেতু x-এর যে কোনো value-তেই $\sin x$ বার করা যাচ্ছে, তাই $\sin x$-এর domain হল $\mathbb{R}$. মনে রেখো যে আমরা এই বইতে কেবল real number নিয়েই কাজ করছি, তাই "যে কোনো value" বলতে "যে কোনো real number" বোঝাচ্ছি।
(ii) আমরা জানি যে, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. তাই এখানে খেয়াল রাখতে হবে $\cos x$-টা 0 হয়ে না যায়। চাকার অ্যানিমেশন দিয়ে ভাবলেই দেখবে যে, $\cos x = 0$ হবে যখন OP-টা একেবারে খাড়া থাকবে, এবং সেটা হবে $\pm 90°, \pm 3 \times 90°, ...$ ইত্যাদি পরিমাণ ঘোরালে। x-এর অন্য যে কোনো value-তে $\cos x \neq 0$ হবে, তাই কোনো সমস্যা নেই। যেহেতু রেডিয়ানে মাপলে $90°$ হয় $\frac{\pi}{2}$, তাই domain-টা হবে

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, ...\}.$$

■

একইভাবে নীচের অংকটা কর তো।

Exercise 37: এদের domain বার কর--
(i) $\cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $\cot x$. ■

এই অংকগুলোতে domain বার করার মূলমন্ত্র ছিল একটাই--শূন্য দিয়ে যেন ভাগ না হয়ে যায়। এরকম আরেকটা জিনিস নিয়েও আমাদের সতর্ক থাকতে হয়, সেটা হল negative সংখ্যার square root নেওয়া। মনে রেখো আমরা real number নিয়ে কাজ করছি, তাই negative সংখ্যার square root হয় না।

Example 46: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$-এর domain কী হবে?

SOLUTION: এখানে আমাদের দরকার $4 - x^2 \geq 0$, অর্থাৎ $x^2 \leq 4$, মানে $-2 \leq x \leq 2$. এই শেষের ধাপটা বোঝার সবচেয়ে সহজ কায়দা হল গ্রাফ এঁকে (Fig 75)। তাই domain হল $[-2, 2]$. ■

Exercise 38: এদের domain বার করো--
(i) $\sqrt{1 - x^2}$. (ii) $\sqrt{x^2 - 4}$. ■

6.1.3 গ্রাফ দিয়ে domain বোঝা

কোনো function-এর গ্রাফ জানা থাকলে তার domain-টা ছবি থেকেই চট্‌ করে বার করা যায়। কায়দাটা দেখিয়েছি Fig 76-এ। মনে করো যেন গ্রাফটার ছায়া পড়েছে x-axis-এর উপরে। তাহলে axis-টার যেসব জায়গা ছায়ায় ঢাকা, সেগুলোই নিয়েই হল function-টার domain. আরেকটু বিশদ করে বললে--x-axis-এর যেসব বিন্দু দিয়ে একটা vertical লাইন টানলে লাইনটা গ্রাফটার গায় গিয়ে লাগবে, সেই সব বিন্দুর set-টাই হল domain.

এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা করা যাক।

Example 47: e^x-এর domain কী হবে?

SOLUTION: Fig 77-র গ্রাফটার দিকে তাকালেই বুঝবে যে, উত্তর হল $\mathbb{R}$. ■

Exercise 39: Fig 78-এর দিকে চোখ রেখে বলো তো $\log_e x$-এর domain কী হবে। ■

Domain-এর গল্প অনেক হল, এবার একটা নতুন জিনিস শিখব।

6.2 Range

একটা function যেসব value নিতে পারে তাদের, set-টাকে বলে সেই function-টার **range.** গ্রাফ দিয়ে ব্যাপারটা বোঝা সুবিধাজনক। Fig 79 দেখলেই সেটা মালুম হবে। ব্যাপারটা অনেকটা domain-এর মতই, খালি সেখানে ছায়াটা পড়ছিল x-axis-এ, আর এখানে পড়ছে y-axis-এ।
পরিচিত function-দের range-গুলো জানা থাকা ভালো। একটা তালিকা বানিয়ে দিচ্ছি। সেই সঙ্গে domain-গুলোও দিয়ে দিলাম। তুমি মনে মনে গ্রাফের সঙ্গে মিলিয়ে নিও কিন্তু, নইলে মনে থাকবে না।

Function	Domain	Range
x^n, যেখানে n odd	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n, যেখানে n even	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$	$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\log_e x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$[x]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$

Example 48: The range of the function

$$y = 3\sin\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2}\right)$$

is

Fig 79

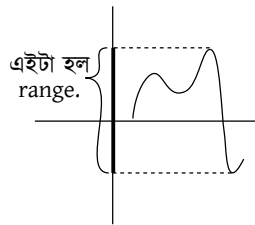
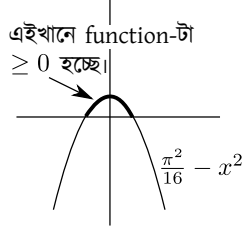
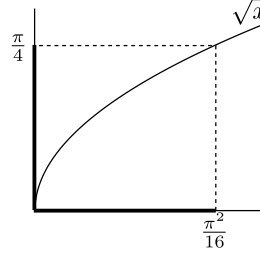
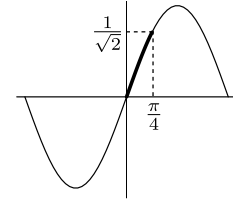



Fig 80 **Fig 81** **Fig 82**

(A) $[0, \sqrt{3/2}]$ (B) $[0, 1]$ (C) $[0, 3/\sqrt{2}]$ (D) $[0, \infty)$.

(JEE2014)

SOLUTION:

এখানে একটা function-এর পেটে আরেকটা function ঢুকেছে, এবং কাণ্ডটা হয়েছে দুই ধাপে--প্রথমে sin-এর পেটে square root, তারপর square root-এর পেটে $\frac{\pi^2}{16} - x^2$. একেবারে ভিতরের জিনিসটার গ্রাফ যে একটা parabola বুঝতেই পারছ, যার দু হাত নীচের দিকে (কারণে x^2-এর আগে মাইনাস আছে)। Fig 80 দ্যাখো। সেটাকে square root-এর পেটে ঢোকানো যাবে, যখন তার value হবে ≥ 0. এই অংশটা মোটা করে দেখিয়েছি। এই অংশটার range (মানে y-axis-এ ছায়া) হল 0 থেকে $\frac{\pi^2}{16}$. সুতরাং square root নেওয়ার পর $\sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2}$-এর range হবে $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Fig 81 দেখে নাও। এবার $\sin x$-এর গ্রাফের এই জায়গাটা মোটা করে দেখিয়েছি Fig 82-এ। $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. এবার ভুলে যেও না যে, আমাদের function-টার একেবারে বাইরে একটা 3 দিয়ে গুণ ছিল। সুতরাং উত্তর হবে (C). ■

এবারের অংকটা দেখে ভয় লাগতে পারে। তাই একটু প্রস্তুতি করে নিই।

প্রস্তুতি:

- x-এর কোন্ কোন্ value-তে $[x] = 0$ হয়?
- $\left[\frac{1}{n}\right]$ কত কত হবে, যদি $n = 1, 2, 3$ হয়?
- যদি $n = -1, -2, -3$ হয়, তাহলেই বা $\left[\frac{1}{n}\right]$ কত কত হবে?

Example 49: For the function $f(x) = \left[\frac{1}{[x]}\right]$, where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x, which of the following statements are true?

(A) The domain is $(-\infty, \infty)$

(B) The range is $\{0\} \cup \{-1\} \cup \{1\}$

(C) The domain is $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

(D) The range is $\{0\} \cup \{1\}$

(JEE2015)

SOLUTION:

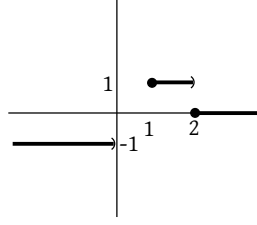



Fig 83

এখানে ঝঞ্ঝাটের জিনিস বলতে আছে ওই $\frac{1}{[x]}$-টা। দেখতে হবে ওখানে তলাটা, মানে $[x]$-টা আবার 0 না হয়ে যায়!

শক্ত আবার কোথায়? ওই শিশিবোতলের জায়গাটা একটু শক্ত ঠেকল। তাছাড়া তো শক্ত কিচ্ছু পেলাম না।
-- হ য ব র ল

সেটা 0 হবে, যখন $x \in [0, 1)$ হবে। সেটুকু বাঁচিয়ে চললেই হবে। অতএব (C)-টা ঠিক, এবং (A)-টা ভুল। যেহেতু $[x]$-টা 0 বাদে যেকোনো integer হতে পারে, তাই $\frac{1}{[x]}$ হবে $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ বা $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$ তার যদি integer অংশটুকু নিই, তবে $-1, 0$ আর 1 ছাড়া আর কিছুই পাবে না। তাই (B)-টাও ঠিক, কিন্তু (D)-টা ভুল।
এই অংকটায় গ্রাফটা আঁকতে বলে নি, বা তার দরকারও পড়ে নি। কিন্তু যদি গ্রাফ আঁকতে বলত, তবে অনেকেই ঘাবড়ে যেত। আসলে কিন্তু গ্রাফটা দেখতে সহজই। এখানে x রয়েছে $[x]$ আকারে। আমরা জানি যে, কোনো integer থেকে তার পরবর্তী integer-র আগে পর্যন্ত $[x]$-এর value একই থাকে। যেমন পুরো $[1, 2)$-এর উপরে $[x] = 1$, পুরো $[2, 3)$-এর উপরে $[x] = 2$, এইরকম। এবার লক্ষ করো যে $[x] = 1$ হলে $f(x) = [1] = 1$. যদি $[x] = 2$ হয় তবে $f(x) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$. একইভাবে $[x]$ যদি আরো বড়ো হয়, তবেও $f(x) = 0$-ই থাকবে। যদি $[x] = -1$ হয়, তবে $f(x) = -1$. যদি $[x] = -2, -3, \ldots$ ইত্যাদি হয়, তবেও কিন্তু $f(x) = -1$ হবে। সুতরাং সব মিলিয়ে গ্রাফটা দাঁড়ালো Fig 83-এর মত। ■

যখন ছাত্র ছিলাম, তখন কোনো এক বন্ধু আমাকে নীচের অংকের করুণ হাস্যকর ঘটনাটা বলেছিল।

Exercise 40: বন্ধুটা একটা কম্পিটিটিভ ইন্টারভিউতে গেছিল। সেখানে তাকে গ্রাফ আঁকতে দিয়েছিল $[x]^{[x]}$-এর, যেখানে $x \in [1, 4)$. আমার বন্ধু বেচারী function-টার চেহারা দেখে এমন ঘাবড়ে গিয়েছিল যে, পুরো ইন্টারভিউয়েরই দফারফা! আগের গ্রাফটা আঁকার পর তোমার নিশ্চয়ই সাহস বেড়ে গেছে। চেষ্টা করে দেখবে নাকি? গ্রাফটা কিন্তু সহজই। ■

Example 50: $x^2 + 4x + 1$-এর range কী হবে?

SOLUTION: এই অংকটা গ্রাফ দিয়ে করা যায়, এইভাবে--

$$x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3.$$

এবার $(x + 2)^2$-এর গ্রাফটা হল x^2-এর গ্রাফকে বাঁদিকে 2 ঘর সরানো। আমরা জানি x^2-এর range হল $[0, \infty)$, তাকে বাঁদিক ডানদিক যেদিকেই সরাও না কেন, range-টা একই থাকবে (কারণ range হল y-axis-এর উপর ছায়া)। এবার সেটাকে 3 ঘর নামিয়ে আনলে পাবে $(x + 2)^2 - 3$-এর গ্রাফ, তাই range-টাও হয়ে যাবে $[-3, \infty)$. এবার আরেকটা কায়দা বলি, সেটা পরের অংকটাতেও কাজে লাগবে।

বিকল্প পদ্ধতি

আমাদের দেখতে হবে $x^2 + 4x + 1$ কী কী value নিতে পারে। মানে, যদি $x^2 + 4x + 1 = a$ লিখি, তবে a-এর value কী কী হতে পারে, যখন $x \in \mathbb{R}$? এটাকে আমরা লিখতে পারি এইভাবে--

$$x^2 + 4x + (1 - a) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

একটা quadratic শূন্য হচ্ছে কোনো $x \in \mathbb{R}$-এর জন্য। এমনটা হওয়া মানেই discriminant-টা ≥ 0. অতএব

$$4^2 - 4(1 - a) \geq 0.$$

এ থেকেই আসছে $a \geq -3$. সুতরাং আমাদের quadratic-টার range হল $[-3, \infty)$. ■

এবার এই কায়দাটারই একটু সামান্য জটিল প্রয়োগ।

Exercise 41: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined as $f(x) = \frac{x^2-x+4}{x^2+x+4}$. Then the range of the function $f(x)$ is

(A) $\left[\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right]$ (B) $\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$ (C) $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$ (D) $\left[-\frac{5}{3}, \frac{3}{5}\right]$

(JEE2015.31)

HINT:
$\frac{x^2-x+4}{x^2+x+4} = a$ নিলে দেখতে হবে a-র কী কী value সম্ভব, যখন $x \in \mathbb{R}$. এটাকে quadratic-এর আকারে সাজিয়ে লিখলে পাবে--

$$(1-a)x^2 - (1+a)x + 4(1-a) = 0.$$

এর discriminant-টা ≥ 0 হওয়া নিয়ে কথা।
■

6.3 Codomain

অনেক সময়ে একটা $f(x)$ দেওয়া থাকলেই চট্ করে তার range-টা বোঝা মুশকিল, মানে সেটা ঠিক কোন কোন value নিতে পারে, সেটা সহজে বোঝা যায় না। যেমন ধরো, যদি $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x^2+4}$ দিই, তবে তার range বার করতে হলে discriminant ইত্যাদির ঝঞ্ঝাটে জড়াতে হবে। কিন্তু এটা বলা কঠিন নয় যে, $f(x)$ কখনো 0-র চেয়ে কম হতে পারে না, কারণ এখানে x-রা সবাই x^2 হিসেবে আছে, আর কোথাও কোনো মাইনাস চিহ্ন এসে যাওয়ার পথ নেই। তাই আমরা এখানে $[0, \infty)$-কে f-এর **codomain** বলতে পারি, অর্থাৎ কিনা--

> "$f(x)$ ঠিক কী কী value নিতে পারে, বলতে পারছি না, তবে এটুকু বলতে পারি যে, সেটা $[0, \infty)$-এর বাইরে কখনোই যেতে পারে না"।

আরেকভাবে বলা যায়--

> Codomain এমন একটা set, যার মধ্যে range-টা হল একটা subset.

ফাঁদ ফেলে তার ছায়ার উপর খাঁচায় রাখি পুরে।

--সুকুমার রায়

গ্রাফ দিয়ে ভাবলে range ছিল y-axis-এর উপর গ্রাফটার ছায়া। আর codomain হল যেন সেই ছায়া ধরার একটা ফাঁদ। ফাঁদটা কত বড় তা নিয়ে মাথাব্যথার দরকার নেই, খালি ছায়াটা যেন পুরোটাই তার মধ্যে এঁটে যায়। তাই codomain-এর বেলায় আমাদের অনেকটাই স্বাধীনতা আছে, যেমন এই উদাহরণে $[0, \infty)$-এর জায়গায় $\mathbb{R}$ নিলেও কাজ চলত। আবার ভালো করে তাকালেই বুঝবে যে আমাদের $f(x)$-টা কখনোই 0 হতে পারে না, তাই codomain-টা $(0, \infty)$-ও নেওয়া চলত।

সাধারণতঃ অংকের জগতে একটা function দেওয়ার সময়ে তার domain এবং codomain-এর উল্লেখ করে দেওয়াটা একটা প্রথা। যদি $f(x)$-এর domain হয় A আর codomain হয় B, তবে আমরা সংক্ষেপে লিখি $f : A \to B$. এই notation-টার সঙ্গে আগেই কয়েকটা অংকে আমাদের মোলাকাত হয়েছে, এখন ভালো করে পরিচয় হল। আমরা এই বইতে যেহেতু real number-দের নিয়ে কাজ করছি, তাই সবসময়েই codomain-টাকে $\mathbb{R}$ নেওয়া চলবে। কোনো কিছু বলা না থাকলে সেটাই বুঝে নেবে। অনেকসময়ে "$f(x)$-এর codomain হল $\mathbb{R}$" না বলে লোকে বলে "$f(x)$ is a real-valued function." দুটো বাক্যেরই একই মানে।

নীচের অংকটা codomain বার করা নিয়ে, যদিও codomain শব্দটা এখানে ব্যবহার করা হয় নি।

Exercise 42: Let $f(\theta) = (1 + \sin^2\theta)(2 - \sin^2\theta)$. Then for all values of θ

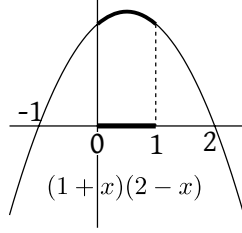



Fig 84

(A) $f(\theta) > \frac{9}{4}$ (B) $f(\theta) < 2$ (C) $f(\theta) > \frac{11}{4}$ (D) $2 \leq f(\theta) \leq \frac{9}{4}$

(JEE2013)

HINT:

এখানে $f(\theta)$-কে একটা function-এর পেটে আরেকটা function বলে ভাবলে সুবিধা হবে--$(1+x)(2-x)$-এর পেটে যেন $x = \sin^2\theta$ ঢোকানো হয়েছে। আমরা জানি $\sin\theta$-এর range হল $[-1, 1]$. তাই $\sin^2\theta$-র range হবে $[0, 1]$. এবার $(1+x)(2-x)$-এর গ্রাফটা ভাবো--parabola, দুহাত নীচের দিকে (কারণ x^2-এর আগে মাইনাস আসছে), x-axis-কে ছেদ করবে -1 আর 2-তে। সুতরাং গ্রাফটার আদল Fig 84-এর মত। এর মোটা জায়গাটার সর্বনিম্ন আর সর্বোচ্চ বিন্দুর উচ্চতা বের করে ফেললেই উত্তর পেয়ে যাবে। তবে আমি বলব যে, আগে সর্বনিম্ন বিন্দুটার উচ্চতা বের করে নাও (সেটা সহজ, কেন?), তারপর option-গুলোর দিকে চোখ বোলালেই দেখবে একজনই পড়ে থাকে। কোনটা?

■

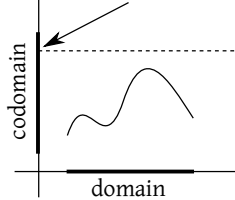
DAY 7
একগুচ্ছ নতুন কথা (দ্বিতীয় পর্ব)

7.1 Onto আর one-to-one

আমরা দেখেছি যে, একটা function-এর codomain তার range-এর চেয়ে বড় যেকোনো set-ই হতে পারে। যদি codomain-টা যথাসম্ভব ছোটো নাও, তবে সেটা range-এর সমান হতে হবে। এই অবস্থায় function-টাকে বলে **onto,** অর্থাৎ যে সব function তাদের codomain-এর প্রতিটা value-ই নিতে পারে, তারাই হল onto. গ্রাফ দিয়ে ব্যাপারটা বোঝা সহজ।

Example 51: Fig 85-এ একটা function-এর গ্রাফ এবং তার domain আর codomain দেখানো আছে। এই function-টা কি onto?

Fig 85

Codomain-এর এই value-টা function-টা কখনোই নিচ্ছে না।

codomain

domain

SOLUTION: না, কারণ codomain-এ অন্ততঃ এমন একটা বিন্দু রয়েছে যেখান দিয়ে horizontal লাইন টানলে সেটা গ্রাফের কোথাও গিয়ে লাগে না, অর্থাৎ ওই বিশেষ value-টা আমাদের function-টা কখনোই নেয় না। ■

Example 52: ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হল $f(x) = x^2$. এটা কি onto?

SOLUTION: উত্তর হল--না, কারণ আমরা জানি যে, কোনো real number-এর square কখনও < 0 হতে পারে না। কিন্তু এখানে codomain বলা আছে $\mathbb{R}$ (তীর চিহ্নের পরে যেহেতু $\mathbb{R}$ রয়েছে), এবং $\mathbb{R}$-এর মধ্যে negative সংখ্যারাও আছে। ■

Example 53: ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = x^3$. এটা কি onto?

SOLUTION: গ্রাফটা চিন্তা করলেই বুঝবে যে, f-টা onto, কারণ যেখান দিয়েই horizontal লাইন টানো না কেন, সেটা গ্রাফটার গায় লাগতে বাধ্য। ■

Exercise 43: নীচে কয়েকটা $f : A \to B$-র কথা বলা আছে। এদের মধ্যে কারা onto বলতে হবে।

1. $f(x) = [x],\ A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{Z}.$
2. $f(x) = e^x,\ A = \mathbb{R},\ B = [0, \infty).$
3. $f(x) = \sqrt{x},\ A = [0, \infty),\ B = [0, \infty).$
4. $f(x) = x - [x],\ A = \mathbb{R},\ B = [0, 1].$

HINT: বেশীরভাগ ক্ষেত্রেই গ্রাফ দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। শেষেরটা একটু কঠিন মনে হতে পারে। একটু উদাহরণ নিয়ে চিন্তা কর। যেমন ধরো, $x = 3$ হলে $f(x) = f(3) = 3 - [3] = 3 - 3 = 0$. আবার $x = 3.2$ হলে $f(x) = f(3.2) = 3.2 - [3.2] = 3.2 - 3 = 0.2$. যদি $x = -3.2$ হয়, তাহলে $f(x)$ কত হবে? এবার ভাবো তো $f(x)$ কি কখনো 0-র চেয়ে ছোটো বা 1-এর চেয়ে বড় হতে পারে? 1-এর সমান হতে পারে? ■

এবার একটা নতুন কথা শিখব, **one-to-one.** একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 54: দুটো function দিচ্ছি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আর $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x^2$.

লক্ষ কর যে, দুজনেরই ফর্মুলা একই, তফাৎ কেবল domain-এ। যদি বলে দিই $f(x) = 4$, তবে x-এর value-টা বার করতে পারবে? যদি বলে দিই $g(x) = 4$, তবে?
SOLUTION: $f(x) = 4$ বলে দেওয়া মানে $x^2 = 4$, যেখানে $x \in \mathbb{R}$ (যেহেতু f-এর domain হল $\mathbb{R}$)। সুতরাং দুটো উত্তর সম্ভব $x = 2$ আর $x = -2$. সেই কারণে এক কথায় জোর দিয়ে বলা সম্ভব নয় যে x-টা 2 হবে নাকি -2 হবে। কিন্তু $g(x) = 4$ বলে দেওয়া মানে $x^2 = 4$, যেখানে $x \geq 0$ (যেহেতু g-এর domain হল $[0, \infty)$)। সুতরাং এখানে খালি একটাই উত্তর সম্ভব, $x = 2$. ■

যদি কোনো function-এর বেলায় দ্যাখো যে, range-এর মধ্যে যেকোনো value বলে দেওয়া থাকলে তা থেকে x-এর ঠিক একটাই value বার করে ফেলা যাচ্ছে, তবে সেইরকম function-কে বলবে one-to-one. গ্রাফ দিয়ে ভাবলে ব্যাপারটা এইরকম-- একটা function যদি one-to-one হয়, তার মানে এমন কোনো horizontal লাইন পাবে না, যেটা গ্রাফটার গায় একাধিক জায়গায় লাগে। যদি একটাও এরকম horizontal লাইন পাও, তবে function-টা one-to-one হল না। Fig 86 দ্যাখো।

Example 55: Consider the function $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ given by

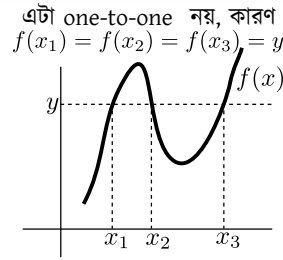



Fig 86

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}.$$

Then

(A) f is one-one but not onto.

(B) f is onto but not one-one.

(C) f is neither one-one nor onto.

(D) f is both one-one and onto.

(Bstat/Bmath2012short.15)
SOLUTION: এখানে একটা নতুন চিহ্ন আছে, "\"। যদি A, B দুটো set হয়, তবে $A \setminus B$ মানে সেই সব element-দের set, যারা A-তে আছে, কিন্তু B-তে নেই। অনেক সময়ে একে $A - B$-ও লেখে। এখানে যেমন $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ মানে হল $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 1\}$.
এবার অংকটা করা যাক। আমরা যাবতীয় $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ নিয়ে পরীক্ষা করে দেখব যে, $y = f(x)$ দেওয়া থাকলে আমরা তা থেকে x বার করে ফেলতে পারি কিনা। এরকম কোনো y নেওয়া যাক, মানে $y \neq 2$. তাহলে $y = f(x)$ মানে

$$y = \frac{2x}{x-1}.$$

এটাকে খানিকক্ষণ দলাইমলাই করলে পাবে

$$x = \frac{y}{y-2}.$$

(এখানে $y - 2$ দিয়ে ভাগ করতে অসুবিধা নেই, কারণ $y \neq 2$)। বাঃ, তবে তো codomain-এর যেকোনো y থেকেই দিব্যি একটাই x বার করে ফেলা যাচ্ছে। তার মানে উত্তর হবে (D). ব্যাপারটা বুঝে নাও ভালো করে--codomain-এর যে কোনো y থেকেই যে x-এর অন্ততঃ একটা value পাওয়া যাচ্ছে তাতেই onto বলা গেল, আর কোথাওই যে x-এর একাধিক value পাওয়া যায়নি, তাতে one-to-one বলতে পারলাম। ■

যে সব function একই সঙ্গে onto এবং one-to-one, তাদের বলে **bijection** বা **invertible function.**

Example 56: The function $f(x) = x^2 + bx + c$, where b and c are real constants, describes

(A) one-to-one mapping

(B) onto mapping

(C) not one-to-one but onto mapping

(D) neither one-to-one nor onto mapping

(JEE2014)
SOLUTION: এখানে অংকটা অসম্পূর্ণভাবে দিয়েছে, কারণ domain আর codomain বলা নেই। আমরা ধরে নেব $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, মানে domain আর codomain দুটোই হল $\mathbb{R}$.
গ্রাফ দিয়ে ভাবো। যদিও b আর c কত বলে দেয় নি, কিন্তু তাও গ্রাফের আদলটা বোঝা যাচ্ছে--parabola, দুহাত উপরে তোলা (কারণ x^2-এর coefficient হল 1, যেটা > 0)। Fig 87 দ্যাখো। বুঝতেই পারছ যে, এটা onto নয়, one-to-one-ও নয়। তাই (D)-টা খালি ঠিক। ■

Example 57: For integers m and n, let $f_{m,n}$ denote the function from the set of integers to itself, defined by

$$f_{m,n}(x) = mx + n.$$

Let $\mathcal{F}$ be the set of all such functions,

$$\mathcal{F} = \{f_{m,n} \ : \ m, n \text{ integers}\}.$$

Call an element $f \in \mathcal{F}$ *invertible* if there exists an element $g \in \mathcal{F}$ such that $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ for all integers x. Then which of the following is true?

(A) Every element of $\mathcal{F}$ is invertible.

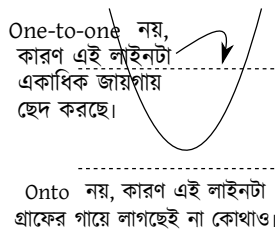
(B) $\mathcal{F}$ has infinitely many invertible and infinitely many non-invertible elements.

(C) $\mathcal{F}$ has finitely many invertible elements.

(D) No element of $\mathcal{F}$ is invertible.

(BStat/BMath2013Short.9)
SOLUTION: এই ধরণের অংকে এতটা বর্ণনা পড়তে গিয়েই অনেকে ভয় পেয়ে যায়। প্রথমে উদাহরণ দিয়ে বুঝে নিই এখানে $f_{m,n}$-গুলো কীরকম জিনিস। ধরো, $m = 1$ আর $n = 2$ নিলাম, তবে $f_{m,n}(x)$ মানে $f_{1,2}(x)$ হবে $x + 2$. এখানে x খালি integer-ই হতে পারে। এরকম যাবতীয় $f_{m,n}$-কে নিয়ে তৈরী set-টাকে নাম দেওয়া হয়েছে $\mathcal{F}$.
এবার এই অংকে "invertible" শব্দটা একটা বিশেষ অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে। একটা $f \in \mathcal{F}$-কে invertible বলব যদি এমন $g \in \mathcal{F}$ থাকে, যাতে $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ হয়, সব integer x-এ জন্যই। একটা উদাহরণ দিয়ে বুঝে নিই। ধরো f নিলাম $f_{1,2}$. তার জন্য কি এরকম $g \in \mathcal{F}$ পাব? এর জন্য g-কেও $f_{m,n}$ আকারের হতে হবে। তবে

$$f(g(x)) = g(x) + 2 = mx + n + 2.$$

Fig 87

একে যদি যে কোনো integer x-এর জন্যই x-এর সমান হতে হয়, তবে $m = 1$ আর $n + 2 = 0$ হওয়া ছাড়া পথ নেই। তার মানে $g = f_{1,-2}$ হবে।
এবার পরীক্ষা করে দ্যাখো যে $g(f(x)) = x$-ও হচ্ছে। সুতরাং $f_{1,2}$ হল invertible.
আরেকটা উদাহরণ নিই, ধরো $f_{2,1}$. এটা কি invertible? যদি হয়, তবে এমন কোনো $f_{m,n}$ থাকবে যাতে $f_{m,n}(f_{2,1}(x)) = f_{2,1}(f_{m,n}(x)) = x$ হবে, এবং সেটা যাবতীয় integer x-এর জন্যই। একটু দলাইমলাই করলেই দেখবে $f_{m,n}(f_{2,1}(x)) = 2mx + m + n$. এটা যদি x হতে হয়, তবে $2m = 1$ হতে হয়, যেটা অসম্ভব (কারণ m একটা integer)। অতএব $f_{2,1}$ মোটেই invertible হচ্ছে না।
এইভাবে আরো নানারকম $f_{m,n}$ নিয়ে খানিকক্ষণ খেলা করে দ্যাখো তো invertible হবার কোনো শর্ত চোখে পড়ছে কিনা। আমরা উত্তরটা এক্ষুণি বলে দেব, কিন্তু নিজে চেষ্টাটা না করলে মজাটা পাবে না।
উত্তরটা বার করার কায়দাটা এরকম--$f_{m,n}$ যদি invertible হয়, তবে এমন $f_{m',n'}$ আছে যাতে $f_{m,n}(f_{m',n'}(x)) = f_{m',n'}(f_{m,n}(x)) = x$ হয়। এবং এর মানে হল $mm'x + mn' + n = x$ এবং $mm'x + m'n + n' = x$ হওয়া। এর জন্য অবশ্যই প্রয়োজন $mm' = 1$ হওয়া, এবং $mn' + n = m'n + n' = 0$ হওয়া।
এর মধ্যে $mm' = 1$ থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে, হয় $m = m' = 1$ আর নয়তো $m = m' = -1$. যদি $m = m' = 1$ হয়, তবে $n' = -n$ নিলেই হবে, আর $m = m' = -1$ হলে $n = n'$.
যদি নিজে কয়েকটা উদাহরণ নিয়ে না খেলা করে থাকো, তবে এইখানটায় তোমার মাথা গুলিয়ে গেছে নিশ্চয়ই! যতই algebra-র কসরত করি না কেন, এইধরণের অংক কিন্তু আসলে উদাহরণ নিয়ে খেলা করেই সমাধান করতে হয়।
যাই হোক, আমরা যেটা পেলাম সেটা হল এই, $f_{m,n}$ খালি তখনই invertible হবে যখন $m = 1$ বা $m = -1$ হবে (n যা খুশি হতে পারে)। বুঝতেই পারছ যে, অসংখ্য $f_{m,n}$ আছে যারা invertible, যেমন $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \ldots$। আবার অসংখ্য $f_{m,n}$ এমন আছে যারা invertible নয়, যেমন $f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \ldots$ সুতরাং উত্তর হবে (B). ■

7.2 উপরতলায় -1

এইবার আমরা একটা notation শিখব, যেটা নিয়ে বহু ছাত্রছাত্রী সমস্যায় পড়ে। Notation-টা হল একটা power-এর মত, যেখানে উপরতলায় আছে -1. যেমন 2^{-1} বা $f^{-1}(x)$, এইরকম। এখানে গোলমেলে ব্যাপারটা হল এই যে, এই notation-টা বিভিন্নক্ষেত্রে বিভিন্ন জিনিস বোঝায়। একে একে বোঝা যাক--

1. যদি কোনো সংখ্যা বা variable জাতীয় জিনিসের উপরে -1 থাকে power হয়ে, তবে বোঝায় "এক ভাগ সেই সংখ্যাটা" যেমন $5^{-1} = \frac{1}{5}$, এইরকম। এর পোশাকি নাম হল **reciprocal,** যেমন 5-এর reciprocal হল $\frac{1}{5}$. একইভাবে $x^{-1} = \frac{1}{x}$ এবং $\big(f(x)\big)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

2. যদি কোথাও লেখা দ্যাখো $f^{-1}(x)$, তবে বুঝবে f হল একটা function যার inverse আছে (সেই যেমন আমরা দেখেছিলাম e^x-এর inverse হল $\log_e x$) এবং $f^{-1}(x)$ হল সেই inverse-টা। যেমন $f(x) = e^x$ হলে $f^{-1}(x) = \log_e x$. যদি f-এর inverse না থাকে, তবে কিন্তু $f^{-1}(x)$-এর কোনো মানে হয় না। এর একটা বিচ্ছিরি ব্যতিক্রম আছে $\sin x$, $\cos x$ আর $\tan x$-এর বেলায়। সেই প্রসঙ্গে একটু পরে আসছি।

3. কিন্তু যদি কখনো দ্যাখো লিখেছে $f^{-1}(A)$, যেখানে A হল f-এর codomain-এর একটা subset, তবে কিন্তু f-এর inverse থাকার কোনো দরকার নেই। সেক্ষেত্রে এর মানে হল সেই সব x-এর set যাতে $f(x) \in A$ হয়। অংকের ভাষায়--
$$f^{-1}(A) = \{x \ : \ f(x) \in A\}.$$
এই notation-টা নিয়ে অনেক ছাত্রছাত্রীকে খাবি খেতে দেখি।

নীচের অংকটা করে উপরতলার -1-দের সঙ্গে পরিচিত হয়ে নাও।

Example 58: দুটো function দিচ্ছি-- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আর $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^2$ আর $g(x) = x^3$.
তাহলে নীচের জিনিসগুলো বার করো।
(*i*) $\big(f(2)\big)^{-1}$, $\big(g(2)\big)^{-1}$. (*ii*) $f^{-1}(4)$, $g^{-1}(8)$. (*iii*) $f^{-1}(\{4\})$, $g^{-1}(\{8\})$. (*iv*) $f^{-1}(\{-4\})$, $g^{-1}(\{-8\})$.
SOLUTION:

1. $\big(f(2)\big)^{-1} = \frac{1}{4}, \big(g(2)\big)^{-1} = \frac{1}{8}$.
2. $f^{-1}(4)$-এর মানে হয় না, কারণ f-এর inverse নেই। $g^{-1}(8) = 2$, কারণ যেকোনো সংখ্যার ঠিক একটাই cube root থাকে (আমরা এখানে খালি real number নিয়ে কাজ করছি, complex number নিলে আরো cube root থাকতে পারে)। 8-এর cube root হল 2.
3. $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$. আর $g^{-1}(\{8\}) = \{2\}$.
4. $f^{-1}(\{-4\}) = \phi, g^{-1}(\{-8\}) = \{-2\}$.

■

Exercise 44: দুটো function দিচ্ছি-- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আর $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = e^x$ আর $g(x) = (x-1)^2$. তাহলে নীচের জিনিসগুলো বার করো।
(*i*) $\big(f(2)\big)^{-1}$, $\big(g(2)\big)^{-1}$. (*ii*) $f^{-1}(4)$, $g^{-1}(8)$. (*iii*) $f^{-1}(\{e^2, e^4\})$, $g^{-1}(\{e^2, e^4\})$. (*iv*) $f^{-1}(\{-4\})$, $g^{-1}(\{-8\})$.
■

Exercise 45: Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $f(x) = 3x^2 + 1$. Then the set $f^{-1}([1, 6])$ is

(A) $\left\{-\sqrt{\frac{5}{3}}, 0, \sqrt{\frac{5}{3}}\right\}$ (B) $\left[-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right]$ (C) $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ (D) $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

(JEE2014)
HINT:
এখানে f^{-1}-এর পেটের মধ্যে আছে $[1, 6]$, যেটা codomain মানে $\mathbb{R}$-এর একটা subset, তার মানে এখানে

$$f^{-1}([1, 6]) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in [1, 6]\}.$$

এটা গ্রাফ থেকে চমৎকার বার করে ফেলা যাবে। $f(x)$-এর গ্রাফটা যে একটা দুহাত তোলা parabola হবে, সে তো বুঝতেই পারছ[2] (Fig 88)। এটা আঁকার জন্য প্রথমে x^2-এর গ্রাফ এঁকে সেটাকে 3 গুণ লম্বা করে, 1 ঘর উপরে তুলে দিয়েছি। এবার y-axis-এ $[1, 6]$-এর উপর দিয়ে একটা নদী এঁকে নিয়েছি। দ্যাখো গ্রাফটার কোন কোন অংশ নদীর মধ্যে পড়েছে। সেইসব অংশের ছায়া x-axis-এ যেখানে পড়েছে সেটাই আমাদের উত্তর।

[2]কারণ quadratic, এবং x^2-এর coefficient হল > 0.

Fig 88

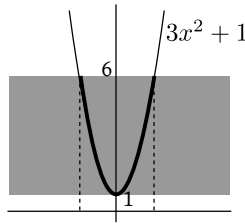
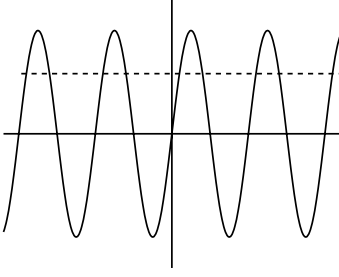
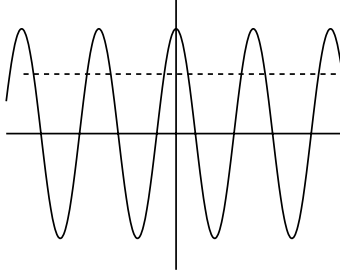
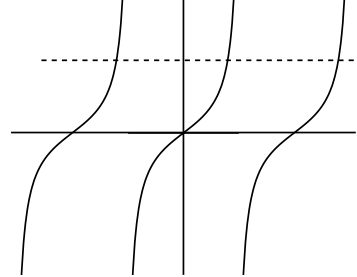



Fig 89 **Fig 90** **Fig 91**

এবার চট করে option-গুলোর দিকে চোখ বোলালেই বুঝবে যে, (A) আর (D) হতে পারে না (কেন?)। পড়ে রইল (B) আর (C). এরা একইরকম দেখতে, পার্থক্য খালি প্রান্তদুটোতে, (B)-র বেলায় $\sqrt{\frac{5}{3}}$ আর (C)-এর বেলায় $\sqrt{\frac{1}{3}}$. এর মধ্যে যে কোনো একটাকে $f(x)$-এ বসিয়ে দ্যাখো 6 হচ্ছে কিনা।
■

Exercise 46: Let $f(x) = \frac{1}{x-2}$. The graphs of the functions f and f^{-1} intersect at

(A) $(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$ and $(1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$

(B) $(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$ and $(\sqrt{2},\ \ -1-\frac{1}{\sqrt{2}})$

(C) $(1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$ and $(-\sqrt{2},\ \ -1+\frac{1}{\sqrt{2}})$

(D) $(\sqrt{2},\ \ -1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ and $(-\sqrt{2},\ \ -1+\frac{1}{\sqrt{2}})$

(BStat/BMathMCQ.17)
HINT: অংকটার ভাষায় সামান্য ত্রুটি আছে। এখানে f-এর codomain বলে দেয় নি। তাই স্বাভাবিকভাবে codomain-টাকে $\mathbb{R}$ ধরে নেওয়ার কথা। কিন্তু তাতে এখানে চলবে না, কারণ সেক্ষেত্রে function-টা মোটেই onto হবে না (যেহেতু $f(x)$ কখনোই 0 হতে পারে না)। সুতরাং f^{-1}-এর অস্তিত্বই থাকছে না। অংকটাকে মেরামত করে নেওয়ার জন্য ধরে নেব যে, codomain হল $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. আর domain তো বোঝাই যাচ্ছে, $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
এবার অংকটা কষা যাক। যদিও এখানে প্রশ্নে গ্রাফের কথা বলা আছে, আসলে এটা গ্রাফ না এঁকেই সহজে করে ফেলা যায়। $f(x) = \frac{1}{x-2}$ বলা আছে, তার মানে $x = f(y)$ থেকে পাব $f^{-1}(x) = 2 + \frac{1}{x}$. এবার $f(x) = f^{-1}(x)$ থেকে পাই $\frac{1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x}$. খানিকটা কষলেই আসছে $x^2 - 2x - 1 = 0$. বাকিটুকু বুঝতেই পারছ আশা করি। ■

7.2.1 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ আর $\tan^{-1} x$

আমরা একটু আগেই বলেছি যে, $f^{-1}(x)$ মানে হল $f(x)$-এর inverse (এবং সেটা defined হবার জন্য $f(x)$-কে one-to-one এবং onto হতে হবে)। কিন্তু এর একটা বিচ্ছিরি ব্যতিক্রম আছে। সেটা হল $\sin x$, $\cos x$ আর $\tan x$-এর ক্ষেত্রে। এদের গ্রাফ (Fig 89, Fig 90 আর Fig 91) দেখেই বোঝা যায় যে, এরা মোটেই কেউ one-to-one নয় (কারণ এমন horizontal লাইন টানা যাচ্ছে, যেটা একাধিক জায়গায় গ্রাফের গায় লাগে), তাই এদের inverse থাকার প্রশ্নই ওঠে না। কিন্তু তাও দেখবে লোকে $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ আর $\tan^{-1} x$ লেখে। এর জন্য একটা ছোটো "কারচুপি" করা হয়, প্রথমে $\sin x, \cos x$ আর $\tan x$-এর domain-গুলোকে ছোটো করে নেওয়া হয়, যাতে ওরা one-to-one হয়ে যায়, মানে কোনো horizontal লাইন যেন ওদের গ্রাফে একাধিক জায়গায় লাগতে না পারে। একইভাবে codomain-টাকে কমিয়ে range-এর

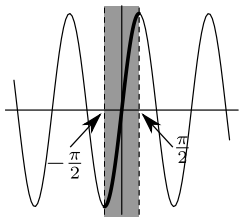
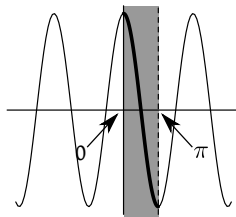
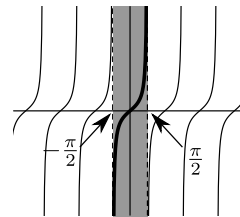



Fig 92 **Fig 93** **Fig 94**

সমান করে নেওয়া হয়, যাতে ওরা onto হয়ে যায়। এর ফলে Fig 92, Fig 93 আর Fig 94-এর মত মোটা অংশটুকু খালি পড়ে থাকে। সংকোচনের পরে domain আর codomain-গুলো কেমন হয়, সেটা নীচে দিলাম--

Function	সংকুচিত domain	সংকুচিত codomain=range
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$
$\cos x$	$[0,\pi]$	$[-1,1]$
$\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

এবার এই নতুন domain আর codomain নিয়ে এই তিনটে function-ই একেকটা bijection, তাই তাদের inverse আছে। এই inverse-গুলোকেই যথাক্রমে $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ আর $\tan^{-1} x$ বলা হয়। যেমন ধরো, $\sin^{-1} x$-এর সংজ্ঞা দাঁড়াচ্ছে এইরকম--

> যদি $x \in [-1,1]$ হয়, তবে ঠিক একটাই $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ পাওয়া যাবে, যাতে $\sin y = x$ হয়। সেই বিশেষ y-টাই হল $\sin^{-1} x$.

আগেই বলেছি যে, দুটো function যদি দেওয়া থাকে f আর g, তবে "ওরা পরস্পরের inverse" মানে হল $f(g(x)) = x$ এবং $g(f(x)) = x$ হতে বাধ্য। আরও বলেছি যে, $\sin x$ আর $\sin^{-1} x$ পরস্পরের inverse নয় (কারণ domain আর codomain সংকোচন না করলে $\sin x$ মোটেই bijection নয়)। এই চিন্তা থেকেই নীচের অংকটার জন্ম।

Exercise 47: দুটো বাক্য দিলাম--

1. যেকোনো $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই $\sin^{-1}(\sin x) = x$ হয়।
2. যেকোনো $x \in [-1,1]$-এর জন্যই $\sin(\sin^{-1} x) = x$ হয়।

এদের মধ্যে অন্তত একটা ভুল। কোনটা? নাকি দুটোই? ■

7.3 Even function আর odd function

আমরা যখন গ্রাফ আঁকার জন্য বিভিন্ন রকমের প্রতিফলনের আলোচনা করছিলাম, তার মধ্যে একটা প্রতিফলন ছিল y-axis-এ আয়না বসিয়ে। অংকের ভাষায় এর কাজ হল $f(x)$-এর গ্রাফকে $f(-x)$-এর গ্রাফে পরিণত করা। এবার মনে করো $f(x)$-এর গ্রাফটা আছে Fig 95-এর মত। তাহলে y-axis বরাবর ওল্টালে কী হবে? একটু ভালো করে তাকালেই বুঝবে যে, কোনোই পরিবর্তন হবে না, কারণ গ্রাফটা y-axis-এর দুপাশে symmetric (অর্থাৎ এক পাশটা অন্যপাশের প্রতিফলন হয়েই আছে)। এরকম function-কে বলে **even function.** অংকের ভাষায় সংজ্ঞা হল--

DEFINITION: Even function

A function $f(x)$ is called an <u>even function</u> if for all x in its domain, $f(-x) = f(x)$.

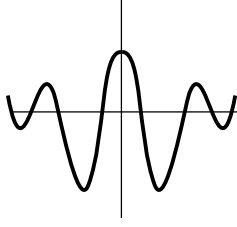



Fig 95

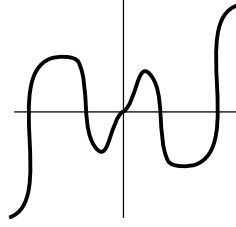



Fig 96

ভাবতে পারো যেন $f(-x)$-এর মাইনাসটা বেমালুম হজম হয়ে যায়। তবে এদের নিয়ে চিন্তা করার ভালো কায়দা হল এইটা মনে রাখা যে, এদের গ্রাফ y-axis-এর দুপাশে symmetric হয়।
একটা even function-এর উদাহরণ তো এমনিতেই মনে পড়া উচিত, $f(x) = x^2$. বস্তুতঃ যদি n একটা even সংখ্যা হয়, তবে x^n একটা even function হতে বাধ্য। সেই জন্যেই even function নামটা হয়েছে।

Exercise 48: $\sin x$ আর $\cos x$-এর মধ্যে একজন even, অন্যজন নয়। কোন জন? গ্রাফ দিয়ে ভাবো। ■

Even function বলে যদি একটা জিনিস হয়, তবে আন্দাজ করতে পারছ যে, **odd function** বলেও কিছু একটা হওয়া উচিত। অংকের ভাষায় এর সংজ্ঞাটা হল--

নেড়া বলল, 'কেন হবে না--আলবৎ হয়। সজারু, কাঙ্গারু, দেবদারু সব হতে পারে, মজারু কেন হবে না?'

--হ য ব র ল

DEFINITION: **Odd function**

A function $f(x)$ is called an odd function if for all x in its domain, $f(-x) = -f(x)$.

ব্যাপারটা প্রায় even function-এর মতই, খালি $f(-x)$-এর মাইনাসটা হজম না হয়ে একেবারে বদহজম হয়ে বাইরে বেরিয়ে আসে। এদেরকেও গ্রাফ দেখেই চমৎকার চিনে ফেলা যায়। তার জন্য দুবার প্রতিফলিত করা দরকার, y-axis বরাবর প্রতিফলন, আর x-axis বরাবর প্রতিফলন। একটা odd function-এর গ্রাফ দেখিয়েছি Fig 96-এ। পর পর দুটো প্রতিফলনই করলে দেখবে যে, গ্রাফটা ফের গোড়ার অবস্থানেই ফিরে এল।

Example 59: যদি n কোনো odd সংখ্যা হয়, তবে x^n একটা odd function হতে বাধ্য। সেখান থেকেই odd function কথাটার উদ্ভব। ■

এবার কয়েকটা ধাঁধার মত অংক দিই। এগুলো করলে even function আর odd function-দের গ্রাফের চেহারাগুলো সড়গড় হয়ে যাবে।

Exercise 49: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log_e x$, এদের মধ্যে এমন কেউ কি আছে যে odd-ও নয়, even-ও নয়? ■

Exercise 50: এমন একটা $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ কি সম্ভব যেটা odd-ও বটে আবার even-ও বটে? ■

Exercise 51: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ যদি একটা odd function হয়, তবে $f(0)$ কত হতে বাধ্য? ■

THEOREM

যদি $f(x)$ আর $g(x)$ হয় odd বা even function, তবে তাদের গুণফল $f(x)g(x)$-এর আচরণ বার করার একটা নামতা আছে--

even $\times$ even $=$ even

odd $\times$ odd $=$ even

odd $\times$ even $=$ odd

এমনটা কেন হয়, সেটা দেখা খুবই সহজ। ধরো, দুটো odd গুণ করলে কেন even হয়, সেটা দেখাব। এর জন্য $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনকেই odd নেব। তাহলে

$$f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x).$$

তাই $f(x)g(x)$ হল even.

Exercise 52: একইভাবে বাকি দুটোও প্রমাণ করে ফ্যালো। ■

Exercise 53: দেখাও যে, $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনেই odd হলে $f(x) + g(x)$-ও তাই হবে। যদি দুজনেই even হত তবে? ■

Exercise 54: যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হয় even, আর $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হয় যেকোনো function, তবে $g(f(x))$ একটা even function হতে বাধ্য। প্রমাণ করো তো! ■

Exercise 55: Which of the following real-valued functions is/are not even functions?

(A) $f(x) = x^3 \sin x$ (B) $f(x) = x^2 \cos x$ (C) $f(x) = e^x x^3 \sin x$ (D) $f(x) = x - [x]$

(JEE2013)

HINT:

মনে রেখো যে x^n-জাতীয় function-রা even নাকি odd হবে, সেটা নির্ভর করে n-টা even নাকি odd, তার উপরে। আর $\sin x$ হল odd function. দুটো odd function-কে গুণ করলে even function হয়। শেষের option-টার বেলায় কিছু উদাহরণ নিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে, যেমন ধরো $f(1/3)$ আর $f(-1/3)$ বার করে দেখতে পারো।
■

Example 60: The even function of the following is

(A) $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$ (B) $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ (C) $f(x) = x\frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ (D) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(JEE2011)

SOLUTION: এখানে জানতে চাইছে এই function-গুলোর মধ্যে কোনটা even.
প্রথমটার বেলায় দ্যাখো $f(-x) = -f(x) \neq f(x)$ হচ্ছে। সুতরাং বাদ গেল। দ্বিতীয়টাও তাই। ওরা দুজনেই odd function. এবার আমরা জানি যে, x নিজেই একটা odd function. তাই (C)-টা ঠিক হবে, কারণ দুটো odd function-এর গুণফল even হয়। শেষেরটার বেলায় ভাবো, x যদি খুব বড় positive সংখ্যা হয়, ধরো 10000, তবে

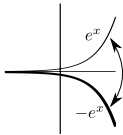
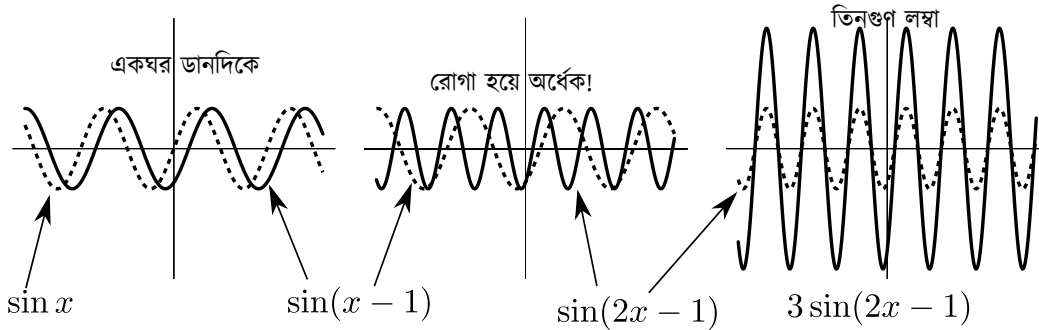
$x+\sqrt{x^2+1} \approx 10000+10000$ হবে। তাই $f(x)$ হবে মোটামুটি $\log_2(20000)$, যেটা বেশ বড় একটা সংখ্যা। কিন্তু যদি $x=-10000$ হয়, তবে $x+\sqrt{x^2+1} \approx -10000+10000 \approx 0$ হবে, তার $\log_2$ নিলে একটা ছোটো সংখ্যা পাবে। তাই বুঝতেই পারছ যে, $f(-10000) \neq f(10000)$ হবে। সুতরাং (D)-টাও বাদ গেল। ■

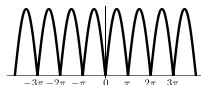
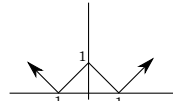
Answers

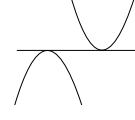
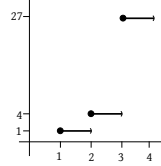
1. (*i*) 13, (*ii*) 2, (*iii*) 0, (*iv*) 0, (*v*) $\frac{1}{8}$, (*vi*) 145, (*vii*) -1. **2.** $2x-1$ আর $2t-1$ আসলে একই function. আবার $t-t^2$ এবং $u-u^2$-ও একই function. **3.** 25. **4.** $g(y)=3y^2-4y+1$.
5. $f(2t)=12t^2-8t-\frac{1}{2t}$. **6.** $(x-1)^2$ আর $1-2t+t^2$ আসলে একই function. কিন্তু 3^{2^x} আর 9^x মোটেই একই function নয়, যেমন $x=2$ নিলে $3^{2^x}=3^8=6561$. ওদিকে $9^3=729$. **7.** হ্যাঁ, কারণ z জানলেই x বার করে ফেলা যাবে। **8.** না, কারণ একই z-এর একই value-র জন্য x,y-এর বিভিন্ন value সম্ভব যাতে area-টা বিভিন্ন হয়। **9.** (*i*) $x \leq 4$. (*ii*) $-2 \leq x \leq 2$. (*iii*) $x \leq 2$ or $x \geq 3$. **10.** $x \geq 60$ দরকার।

11. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 0.1x & \text{if } 0 < x < 100000 \\ 0.2x & \text{if } 100000 \leq x \end{cases}$ **12.** $f(t,t)=3t+\frac{t}{t^2+1}$. $f(3,4)=\frac{47}{5}$.

13. (*i*) $m=4, c=-9$. (*ii*) $m=-\frac{1}{3}, c=\frac{2}{3}$. (*iii*) $\frac{1}{x}$ আছে, তাই $mx+c$ চেহারার নয়।
(*iv*) $m=0, c=0$. (*v*) $(x-1)^2-x^2=-2x+1$, তাই $m=-2, c=1$. **14.**

15. 2-এর slope বেশী। 3-এর slope বেশী। **16.** 1 আর 4-এর slope সমান। আবার 2 আর 3-এর slope-ও সমান। ওদিকে 1 আর 2-এর intercept সমান, এবং 3 আর 4-এরও intercept সমান।
17. $\sin(-400°)=-0.64$ আর $\cos(-400°)=0.77$. **18.** $e^{\log_e 5}=5$ এবং $\log_e e^5=5$. আসলে $f(x)=x$, যার গ্রাফটা তুমি জানোই। **19.**

20.

21.

22.

23. (*i*) 4, (*ii*) -5,

(*iii*) 1. **24.** $n > 1$ হলে $\left[\frac{1}{n}\right] = 0$. যদি $n = 1$ হয়, তবে $\left[\frac{1}{n}\right] = 1$. যদি $n < 0$ হয় তবে $\left[\frac{1}{n}\right] = -1$.
25. এখানে x^5-এর coefficient হল $-6 < 0$. তাই বাঁদিকে মহাশূন্য, ডানদিকে অতল। **26.** (*i*) অতল, মহাশূন্য (*ii*) অতল, অতল (*iii*) মহাশূন্য, মহাশূন্য (সাবধান, এখানে সবচেয়ে বড় power হল x^4)। (*iv*) মহাশূন্য, অতল। এটা আসলে একটা সরলরেখা। **27.** এই দুটো parabola-র মত কিছু একটা-- **28.** (*i*) Negative. (*ii*) 0. (*iii*) Positive. **29.** (*i*) $f(g(x)) = \frac{1}{(x+e^x)^2}$, $g(f(x)) = \frac{1}{x^2} + e^{1/x^2}$. (*ii*) $f(g(x)) = |x|$, $g(f(x)) = x$. (*iii*) $f(g(x)) = x^2(x^2-1)$, $g(f(x)) = (x-1)^2(x-2)^2+1$. (*iv*) $f(g(x)) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2+2}$.
30. (*i*) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, g(x) = 1+x^2$. (*ii*) $f(x) = \sin x, g(x) = 2x^2-5x+2$. (*iii*) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{x+3}$. (*iv*) $f(x) = x^3, g(x) = \sin^2 x + 1$. **31.** (*i*) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, g(x) = e^x$. (*ii*) $f(x) = 2-x+x^2, g(x) = \sin x$. (*iii*) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right), g(x) = e^x$. (*iv*) $f(x) = x^2+3x+4, g(x) = x^2$. **32.** (A). **33.** (B). **34.** না, $x^2 \in [0, 2^2]$ হবে। **35.** $[3, 5)$.
36. (*i*) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 5\}$. (*ii*) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 50\}$. (*iii*) পুরো $\mathbb{R}$. **37.** (*i*) $\mathbb{R}$ (*ii*) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, ...\}$. (*iii*) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \pm\pi, \pm 2\pi, ...\}$. **38.** (*i*) $[-1, 1]$. (*ii*) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. **39.** $(0, \infty)$. মনে রেখো যে গ্রাফটা কিন্তু কখনোই y-axis-এর গায় লাগছে না, তাই 0-টা domain-এর বাইরে রয়েছে। **40.**

এটা রাফে আঁকা, খুব নিঁখুত নয়। **41.** (A). **42.** (D).
43. (*i*) onto. (*ii*) onto নয়। (*iii*) onto. (*iv*) onto নয়। **44.** (*i*) e^{-2}, 1. (*ii*) $\log_e 4$, undefined. (*iii*) $\{2, 4\}$, $\{1 \pm e, 1 \pm e^2\}$. (*iv*) ϕ, ϕ. **45.** (A) হতে পারে না কারণ ছবি থেকে বোঝাই যাচ্ছে যে, উত্তরটা একটা interval, মোটেই একটা finite set নয়। (D) হতে পারে না, কারণ $[1, 6]$-এ যেহেতু দুদিকেই চৌকো ব্র্যাকেট, তাই ছবি থেকেই বুঝবে যে, উত্তরটাও এমন একটা interval হবে যার দুদিকে চৌকো ব্র্যাকেট। উত্তর হবে (B).
46. (A). **47.** প্রথমটা ভুল, দ্বিতীয়টা ঠিক। $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ নিলেই বুঝবে কেন প্রথমটা ভুল। **48.** $\cos x$.
49. দুজন আছে--e^x আর $\log_e x$. **50.** এরকম খালি একভাবেই হতে পারে $f(x) \equiv 0$. **51.** 0, কারণ $f(-0) = -f(0)$. **53.** দুজনেই even হলে $f(x) + g(x)$-ও even হত। **54.** $g(f(-x)) = g(f(x))$, যেহেতু f একটা even function. **55.** (C) আর (D).

Chapter II
Differentiation

DAY 8
Differentiation -- ব্যাপারটা কি?

গত অধ্যায়ে আমরা ক্যালকুলাসের প্রথম গুরুত্বপূর্ণ ধারণাটা শিখেছি, যার নাম function. এবার শিখব দ্বিতীয় গুরুত্বপূর্ণ ধারণাটা-- **differentiation** (ডিফারেন্‌শিয়েশন)। এর মধ্যে অংকের নানারকম খুঁটিনাটি আছে। কিন্তু এখনই সেই খুঁটিনাটির গল্প শুরু করলে সবকিছু গুবলেট হয়ে যাবার সমূহ সম্ভাবনা। তাই ওইসব খুঁটিনাটি এড়িয়ে আমরা সরাসরি মূল ধারণাটা বুঝে নেব। অংকের সূক্ষ্ম তর্কগুলো আপাততঃ মুলতুবি থাকুক শেষ অধ্যায়ের জন্য।
Differentiation-এর মূল ধারণাটা আমরা ধাপে ধাপে শিখব। গত অধ্যায়ে function নিয়ে যে আলোচনাটা করেছিলাম, সেটা এখানে বারবারই কাজে লাগবে। কিন্তু সেই সুদীর্ঘ আলোচনায় যদি তোমার মাথা গুলিয়ে গিয়ে থাকে, তবে দুশ্চিন্তা কোরো না, খালি এই কটা জিনিস মনে রাখলেই আমাদের এখনকার কাজ চলে যাবে--

- এক, function কথাটা শুনলেই জানবে একটা ফর্মুলার কথা হচ্ছে, যার মধ্যে একটাই variable আছে x.
- দুই, কোনো function যদি দেওয়া থাকে $f(x)$, আমরা তার গ্রাফ আঁকতে পারি কাগজের উপর।
- তিন, যদি $f(x)$ এমন কোনো function হয়, যার গ্রাফ একটা সরলরেখা, তবে অবশ্যই $f(x)$-কে $mx + c$ আকারে লেখা যাবে, যেখানে m আর c হল দুটো সংখ্যা।

ব্যস্‌, এইটুকু মনে রাখলেই এই অধ্যায়ের কাজ চলবে!

8.1 প্রথম ধাপ--উঠছে, না নামছে?

কয়েকটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

> বলি, বয়সটা বাড়ছে না কমছে?
> --হ য ব র ল (সুকুমার রায়)

Example 1: একটা গ্রাফ আছে Fig 1-এর মত। একেবারে সরলরেখা। মনে করো এটা একটা মই, যেটা বেয়ে একটা

Fig 1

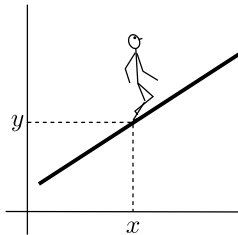
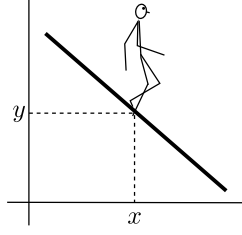
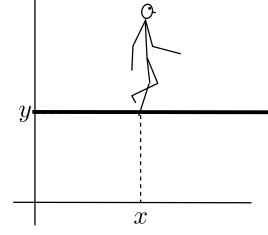



Fig 2 **Fig 3**

লোক বাঁদিক থেকে ডানদিকে যাচ্ছে। ছবি দেখে বলো তো--লোকটা উঠছে নাকি নামছে? আর যদি মইটা থাকত Fig 2-এর মত, তবে?

SOLUTION: প্রথম ক্ষেত্রে উঠছে, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে নামছে। দুই ক্ষেত্রেই কিন্তু লোকটা বাঁদিক থেকে ডান দিকে যাচ্ছে। ■

Example 2: আবার Fig 1-এর দিকে চোখ ফেরাও। লোকটা গ্রাফের যেখানে পা রেখেছে, সেই বিন্দুটাকে (x, y) বলেছি।

লক্ষ করো যে, "বাঁদিক থেকে ডান দিকে যাওয়া" মানে x বৃদ্ধি পাওয়া। এর ফলে "লোকটা উপরে যাচ্ছে" মানে y-ও বাড়ছে। তার মানে এখানে x বাড়লে y-ও বাড়ছে। তাই আমরা বলব যে, এই function-টা হল **increasing.** একই যুক্তিতে, Fig 2-এর function-টা হচ্ছে **decreasing,** মানে x বাড়লে y কমছে। মনে রেখো, x কিন্তু দুই ক্ষেত্রেই বাড়ছে। Increasing হবে নাকি decreasing, সেটা নির্ভর করছে y-এর আচরণের উপরে। ■

Example 3: এবার Fig 3-এর দিকে তাকাও। এখানে লোকটা যদি ডান দিকে এগোয়, তবে সে উঠছে নাকি নামছে?

SOLUTION: উঠছেও না নামছেও না, একই উচ্চতায় থাকছে। মানে x বাড়লে y অপরিবর্তিত থাকছে। অংকের ভাষায় বলব যে, এই function-টা **stationary** (স্টেশনারী)। ■

আমরা গত অধ্যায়েই একটা সরলরেখাকে $y = mx + c$ আকারে লেখা শিখেছি। বুঝতে পারছ আশা করি যে, increasing, decreasing আর stationary-র ব্যাপারটা ঠিক করে দিচ্ছে m-এর চিহ্নটা, positive হলে increasing, আর negative হলে decreasing. আর যদি $m = 0$ হয়, তবে stationary. এই কথাটা মাথায় রাখলেই নীচের অংকটা সহজে হয়ে যাবে।

Exercise 1: কয়েকটা function দিচ্ছি, যাদের গ্রাফ হল সরলরেখা। তোমাকে বলতে হবে কোনটা increasing, কোনটা decreasing, আর কোনটা stationary.
(i) $2x - 3$ (ii) $400 - 0.01x$ (iii) $(x - 3)^2 - x^2$. (iv) 26. ■

Exercise 2: ধরো $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনেরই গ্রাফ সরলরেখা। তাহলে $f(x) + g(x)$-এর গ্রাফও সরলরেখা হবে। যদি $f(x), g(x)$ দুজনেই increasing হয়, তবে $f(x) + g(x)$-ও কি increasing হবেই? ■

Exercise 3: The function $f(x) = ax + b$ is strictly increasing for all real x if

(A) $a > 0$ (B) $a < 0$ (C) $a = 0$ (D) $a \leq 0$

(JEE2011.55)

HINT: এখানে একটা নতুন কথা দিয়েছে "**strictly increasing**". আমরা যাকে increasing বলছি, সেটাকেই এই অংকে strictly increasing বলেছে। আসলে কেউ কেউ আছেন, যাঁরা আমাদের increasing আর stationary-কে

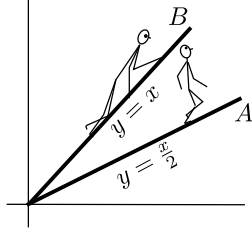
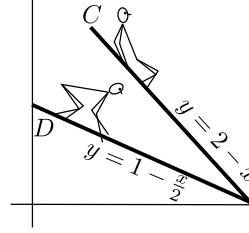



Fig 4 **Fig 5**

একসঙ্গে increasing বলতে ভালোবাসেন। তাই তাঁরা যখন আলাদা করে আমাদের increasing বোঝাতে চান, তখন strictly increasing বলেন। একইভাবে আমরা যাকে decreasing বলেছি, তাঁরা তাকে বলবেন **strictly decreasing**. এই প্রসঙ্গে বলে রাখি যে, "x is positive" বলতে অধিকাংশ লোক $x > 0$ বুঝলেও, কেউ কেউ বোঝেন $x \geq 0$. এঁরা যখন $x > 0$ বোঝাতে চান, তখন বলেন "x is **strictly positive**"। তেমনি, $x < 0$ বোঝাতে বলেন **strictly negative.** আমরা অবশ্য এই বইতে এই ভাষা ব্যবহার করব না, তবে নেহাত কখনও যদি এরকম লোকের মুখোমুখি পড়ে যাও, সেই ভেবে এই আলোচনাটা করলাম।
যাই হোক, এই অংকের উত্তরটা নিশ্চয়ই বুঝতে অসুবিধা হচ্ছে না?
■

8.2 দ্বিতীয় ধাপ--বেশী খাড়াই নাকি কম খাড়াই?

আবার একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করা যাক।

Example 4: Fig 4 দ্যাখো। এখানে দুটো মই আছে। কোন মইটা বেশী খাড়াই?

SOLUTION: চোখে দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে, উত্তর হবে B. মইদুটোর নীচে অবশ্য ওদের function-এর ফর্মুলাও লেখা ছিল। চাইলে সেটা থেকেও একই সিদ্ধান্ত করতে পারতে--দুটো ফর্মুলাকেই $y = mx + c$ আকারে লিখলে A-র বেলায় $m = \frac{1}{2}$ আর B-র বেলায় $m = 1$. দু ক্ষেত্রেই $m > 0$, অর্থাৎ লোক দুটো উপরে উঠছে। কিন্তু যেহেতু B-এর বেলায় m হল বড় $(1 > \frac{1}{2})$, তাই B-টা হল বেশী খাড়া। ■

এবার একইরকম আরেকটা অংক।

Example 5: Fig 5-এও দুটো মই আছে। এবার কোন মইটা বেশী খাড়াই?

SOLUTION: চোখের আন্দাজেই বলে দিতে পারছ নিশ্চয়ই যে, উত্তরটা এখানে C. ফর্মুলা লাগিয়েও একই কাজ করা যেত। দুটো সরলরেখাকেই $y = mx + c$ আকারে লিখলে C-এর বেলায় $m = -1$ আর D-এর বেলায় $m = -\frac{1}{2}$. লক্ষ করো যে, দুক্ষেত্রেই $m < 0$, অর্থাৎ লোক দুটো নামছে। m যত বেশী negative, ততই হুড়মুড়িয়ে নামছে, মানে বেশী খাড়া। যেহেতু $-1 < -\frac{1}{2}$, তাই C হল বেশী খাড়া। ■

আমরা একটু আগেই দেখলাম যে, একটা সরলরেখাকে $mx + c$ আকারে লিখলে m-এর চিহ্নটা ঠিক করে দেয় increasing নাকি decreasing. আর এবার দেখছি যে, m-এর absolute value-টা (মানে চিহ্ন বাদ দিলে যেটা পড়ে থাকে), সেটা ঠিক করে কত বেশী খাড়াই সেটা। এই কথাটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা কর। এখানে ছবি দেব না, খালি ফর্মুলা ব্যবহার করে এগোতে হবে।

Example 6: এদের মধ্যে কে বেশী খাড়াই, কে কম খাড়াই, আর কারা সমান খাড়াই?

$$10x + 3, \quad -10x + 56, \quad -15x + 4.$$

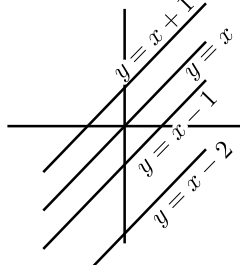
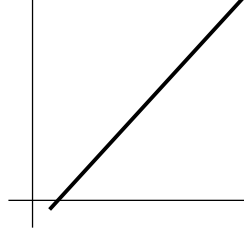
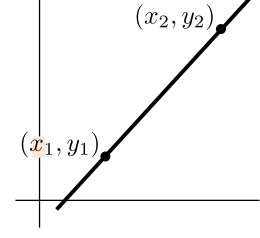



Fig 6 **Fig 7** **Fig 8**

SOLUTION: $10x+3$ আর $-10x+56$ দুজনেই সমান খাড়াই, কারণ প্রথম জনের বেলায় $m=10$ আর দ্বিতীয় জনের বেলায় $m=-10$. সুতরাং চিহ্নটা বাদ দিলে absolute value-তে দুজনেই সমান। অবশ্য চিহ্নের পার্থক্যের জন্য ওরা দুজনে দুদিকে হেলে আছে। কিন্তু $-15x+4$ এদের দুজনের থেকেই বেশী খাড়াই। কারণ এখানে $m=-15$, চিহ্ন বাদ দিলে যার absolute value পাচ্ছি 15, যেটা >10. ■

Exercise 4: কম খাড়াই থেকে বেশী খাড়াই হিসেবে সাজাও--

$$f_1(x)=2x-200, \quad f_2(x)=200x-2, \quad f_3(x)=-3x+4, \quad f_4(x)=-4x-5.$$

■

সুতরাং কোনো সরলরেখাকে $y=mx+c$ আকারে দেওয়া থাকলে আমরা m-এর value দেখেই বলে দিতে পারি খাড়াইটা কেমন হবে এবং কোনদিকে হেলানো থাকবে। এই কাজে c-এর কোনোই ভূমিকা নেই।

Example 7: Fig 6-এ অনেকগুলো সরলরেখা রয়েছে, যাদের সবার ক্ষেত্রেই m সমান, যদিও c বিভিন্ন। এদের মধ্যে কার খাড়াই সবচেয়ে বেশী?

SOLUTION: এরা সবাই সমান খাড়াই, কারণ সবাই সবার সঙ্গে parallel (সমান্তরাল)। ■

যদি m জানা থাকে তবে সরলরেখাটা কতটা খাড়াই হবে, সেটা বলে দেওয়া যাচ্ছে। এবার শিখব গ্রাফকাগজে একটা সরলরেখা দেওয়া থাকলে (Fig 7), কী করে তা থেকে m-টা বার করা যায়।
এর জন্য প্রথমে গ্রাফটার উপর যেকোনো দুটো বিন্দু নাও (Fig 8), ধরো (x_1, y_1) আর (x_2, y_2). আমাদের কাজ হল এই চারটে সংখ্যা x_1, y_1, x_2 আর y_2 থেকে গ্রাফটার slope (মানে m) বার করে ফেলা। যেহেতু সরলরেখাটাকে $mx+c$ আকারে লেখা যায়, তাই

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1+c, \\ y_2 &= mx_2+c. \end{aligned}$$

একটা থেকে অন্যটা বিয়োগ করে দিলেই c-টা কেটে যাবে। তারপর একটু এদিক-ওদিক করলেই পেয়ে যাবে

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

ব্যাপারটা Fig 9-এর মত ছবি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। এখানে একটা right angled triangle রয়েছে, এবং m-টা পাওয়া যাচ্ছে এর height-কে (উচ্চতাকে) base (ভূমি) দিয়ে ভাগ করে। লক্ষ করো যে, এটাকে আমরা $\tan\theta$ বলে ভাবতে পারি (যদিও এভাবে ভাবাটা আমাদের খুব যে একটা কাজে লাগবে এমন নয়)।
একটু হাতেকলমে করে দেখি।

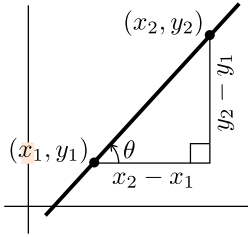
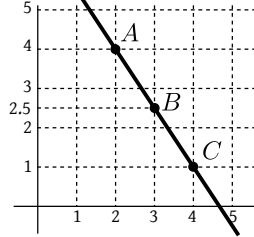
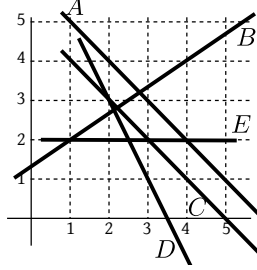
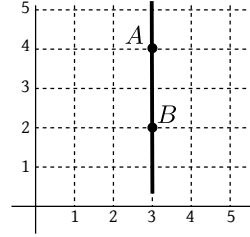



Fig 9 **Fig 10** **Fig 11** **Fig 12**

Example 8: Fig 10-এ গ্রাফ কাগজে একটা সরলরেখা রয়েছে, যার উপর তিনটে বিন্দু এঁকেছি, A, B আর C. এদের মধ্যে A আর C-কে ব্যবহার করে সরলরেখাটার slope বার করো। যদি A আর B-কে ব্যবহার করে slope বার করতে, তবে দ্যাখো তো একই উত্তর আসে কিনা।

SOLUTION: যদি A-কে (x_1, y_1) আর C-কে (x_2, y_2) বলি, তবে $x_1 = 2,\ y_1 = 4$ এবং $x_2 = 4$ আর $y_2 = 1$ হচ্ছে। তাই

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-4}{4-2} = -\frac{3}{2}.$$

এবার A আর B-কে ব্যবহার করে এগোব। তাই x_1, y_1 আগের মতই থাকবে, কিন্তু (x_2, y_2) নেব B-কে, মানে $x_2 = 3$ এবং $y_2 = 2.5$. সুতরাং এবার slope-টা আসছে

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.5-4}{3-2} = -1.5,$$

যেটা সেই আগের $-\frac{3}{2}$-এরই সমান। সেটাই হওয়া স্বাভাবিক, কারণ সরলরেখা যেহেতু, তাই তার পুরোটাই একইরকম খাড়াই, তা সে AB অংশটাই নাও আর AC অংশটাই নাও। চাইলে BC অংশটা নিয়েও slope বার করে দেখতে পারো, বাজি রেখে বলতে পারি একই উত্তর পাবে (যদি না অংক কষতে ভুল করো)! ■

খুব কঠিন কিছু নয়, কী বলো? এবার একইরকম একটা অংক তোমার জন্য।

Exercise 5: Fig 11-এ পাঁচটা সরলরেখা দেখিয়েছি A থেকে E পর্যন্ত। প্রথমে চোখের আন্দাজে বলো কাদের বেলায় slope-টা < 0 আর কাদের বেলায় $= 0$ আর কাদের বেলায় > 0. তারপর চোখের আন্দাজে কম slope থেকে বেশী slope অনুযায়ী সরলরেখাগুলোকে সাজিয়ে লেখো। এবার প্রতিটা সরলরেখার উপর সুবিধামত দুটো করে বিন্দু নিয়ে slope বার করে দ্যাখো চোখের আন্দাজের সঙ্গে মিলছে কিনা (মেলা উচিত!) ■

Slope বার করার এই কায়দায় একটাই খালি সমস্যা হতে পারে। সেটা রয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 9: Fig 12-এ একটা সরলরেখা রয়েছে, যেটা একেবারে খাড়া। এর উপর দুটো বিন্দু দেখিয়েছি A আর B. এদের ব্যবহার করে slope বার করতে পারো?

SOLUTION: যদি A-কে (x_1, y_1) আর B-কে (x_2, y_2) বলি, তবে এখানে $x_1 = x_2$ হয়ে যাচ্ছে। তাই slope বার করার জন্য যে $x_2 - x_1$ দিয়ে ভাগ করতে হয়, সেটা শূন্য হয়ে যাবে। তাই এক্ষেত্রে আমরা বলব যে, slope হল undefined. (খবরদার, undefined বলেছি, ∞ বলি নি কিন্তু!)
■

এতক্ষণ slope-এর এত কচকচি শুনে তোমার মনে প্রশ্ন আসতেই পারে--খামোখা আমরা slope মাপার জন্য এমন উঠে পড়ে লেগেছি কেন? এতে লাভটা কী? অতি সংক্ষিপ্ত উত্তর হল--লাভ অনেক, বিজ্ঞানের নানা শাখার প্রচুর সমস্যাকে এই কায়দায় ঘায়েল করা যায়। তার একটু স্বাদ দিই।

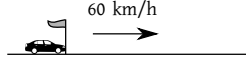
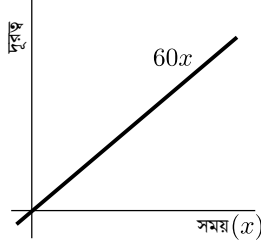
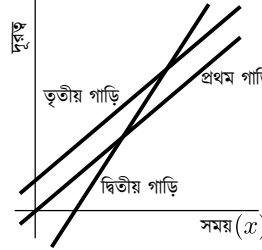
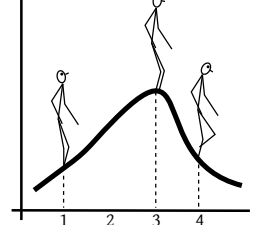



Fig 13 **Fig 14** **Fig 15** **Fig 16**

Example 10: মনে করো একটা গাড়ি চলছে Fig 13-এর মত। ওর velocity (বেগ) হল 60 km/h (অর্থাৎ ঘন্টায় 60 কিলোমিটার)। তবে x ঘন্টা সময়ে ও কত দূরত্ব যাবে? উত্তর হল $60x$ km. এটার গ্রাফ এঁকেছি Fig 14-এ। এটা হল দূরত্ব-বনাম-সময় গ্রাফ, মানে এর x-axis-এ সময় দেখানো হয়েছে (ঘন্টা এককে), আর y-axis-এ দূরত্ব দেখানো হয়েছে (কিলোমিটার এককে)। বল তো এই সরলরেখাটার slope কত।

SOLUTION: এখানে $60x$-কে $mx + c$ আকারে লিখলে m-এর জায়গায় 60 আর c-এর জায়গায় 0 আসে। সুতরাং slope-টা হচ্ছে 60 অর্থাৎ কিনা গাড়ির velocity-টা (km/h এককে)। ■

Velocity জিনিসটা physics-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ ধারণা। এই উদাহরণ থেকেই আমরা দেখলাম যে, সেটা আসলে দূরত্ব-বনাম-সময় গ্রাফের slope ছাড়া কিছুই নয়। নীচের অংকটা করলে বুঝবে slope দিয়ে চিন্তা করলে বাড়তি সুবিধাটা কোথায়।

Exercise 6: তিনটে গাড়ি একই সোজা রাস্তা দিয়ে চলছে। কার কত velocity বলে দিচ্ছি না, খালি কোন সময়ে কে কতটা গেছে তার গ্রাফ দিয়ে দিয়েছি Fig 15-এ। বলো তো কোন দুটো গাড়ির velocity সমান? অন্য গাড়িটার velocity ওদের চেয়ে কম না বেশী? ■

8.3 তৃতীয় ধাপ--সোজা আঙুলে ঘি না উঠলে...

আমরা এতক্ষণ সেই সব গ্রাফদের slope নিয়ে আলোচনা করেছি, যারা একেবারে সটান সোজা। কিন্তু সব গ্রাফ তো আর সোজা নয়, অনেকেই এঁকেবেঁকে চলে। তাদের বেলাতেও slope বার করা যায়। এবার সেটাই শিখব।

Example 11: Fig 16-এ একটা আঁকাবাঁকা গ্রাফ রয়েছে। এর তিন জায়গায় তিনজন লোক দেখা যাচ্ছে। তিনজনেই বাঁদিক থেকে ডানদিকে যাচ্ছে। ওরা কি এই মুহূর্তে উঠছে, নাকি নামছে?

SOLUTION: প্রথম জন উঠছে। তাই আমরা বলব যে, function-টা $x = 1$-এ increasing. দ্বিতীয় জন উঠছেও না নামছেও না, তাই বলব যে, function-টা $x = 3$-এ stationary. আর তৃতীয় জন নামছে, তাই function-টা $x = 4$-এ decreasing. ■

তার মানে increasing, decreasing, stationary-র গল্পটা আঁকাবাঁকা গ্রাফদের বেলাতেও খাটে। খালি সরলরেখাদের বেলায় পুরো গ্রাফটাই হয় একইরকম--সবটাই increasing বা সবটাই decreasing বা সবটাই stationary. কিন্তু আঁকাবাঁকা গ্রাফদের বেলায় একই গ্রাফ এক জায়গায় increasing, আবার আরেক জায়গায় decreasing হতে পারে। সেই কারণে slope-ও বিভিন্ন জায়গায় বিভিন্ন হতে পারে। এই প্রসঙ্গে একটা নতুন ভাষা শিখে রাখো--**curve**. এই শব্দটা দিয়ে আঁকাবাঁকা লাইনদেরও যেমন বোঝানো যায়, তেমনি সোজাদেরও বোঝানো হয়ে থাকে। এমন কি সেই সোজা বা আঁকাবাঁকা লাইনটা কোনো function-এর গ্রাফ না হলেও আপত্তি নেই! Fig 17 দ্যাখো।

Example 12: Fig 18-এ curve-টা সর্বত্রই increasing, কিন্তু slope-টা ক্রমশঃ বাড়ছে, মানে গ্রাফটাকে যদি একটা পাহাড়ের গা বলে কল্পনা করো, তবে পাহাড়টা ক্রমেই খাড়াই হয়ে উঠছে। Fig 19-এও একটা পাহাড়ের গা রয়েছে, খাড়াইটা

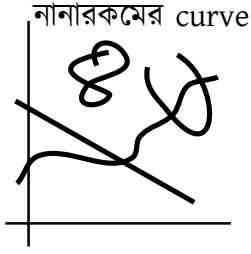
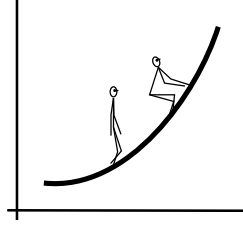
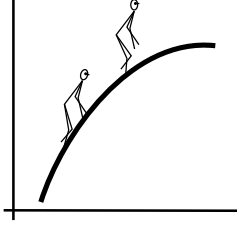
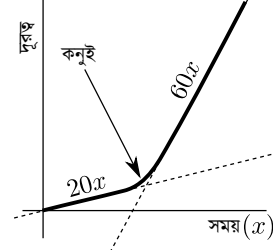



Fig 17 **Fig 18** **Fig 19** **Fig 20**

কিন্তু এখানে ক্রমশঃ কমছে। ■

আমরা গাড়ির উদাহরণে দেখেছিলাম যে, গাড়ির velocity-টা ছিল দূরত্ব-বনাম-সময় গ্রাফের slope. সেখানে velocity-টা অপরিবর্তিত থাকছিল, তাই গ্রাফটা সরলরেখা হচ্ছিল। এবার দেখি velocity পরিবর্তিত হলে কী হয়।

Example 13: একটা গাড়ি যাচ্ছে সোজা রাস্তা দিয়ে। প্রথমে খানিকক্ষণ velocity ছিল 20 km/h. তারপর আস্তে আস্তে বাড়তে বাড়তে ঘন্টায় 60 km/h হল, এবং তারপর থেকে সেই velocity-তেই চলতে লাগল। এখানে দূরত্ব-বনাম-সময় গ্রাফটা কীরকম হবে?

SOLUTION: গ্রাফটা হবে Fig 20-এর মত। লক্ষ করো এর দুইপ্রান্তই সরলরেখা, প্রথমে slope ছিল 20 km/h, শেষে 60 km/h. মাঝখানে একটা কনুইয়ের মত অংশ আছে, যেখানে গ্রাফটা বাঁক নিচ্ছে। এটা হল velocity বাড়ার জায়গাটা। Velocity বাড়ছে, তাই slope-ও বাড়ছে। ■

এই উদাহরণটা থেকেই বুঝতে পারছ যে, দূরত্ব-বনাম-সময় গ্রাফের slope-টা সর্বদাই velocity বোঝায়। গাড়িতে যে স্পীডোমিটার থাকে, সেটা বস্তুতঃ এইভাবেই কাজ করে, কত দূরত্ব যাচ্ছে তার গ্রাফের slope দেখাতে দেখাতে যায়।
এবার তোমার হাত পাকানোর জন্য কিছু অংক দিই।

Exercise 7: প্রথমে x^2-এর গ্রাফটা আঁকো। সেটা দেখে বলো x-এর কোন কোন value-তে x^2-টা increasing, আর কোন কোন value-তে decreasing. এমন কোনো value কি আছে, যেখানে function-টা stationary? ■

Exercise 8: $\sin x$-এর গ্রাফটা এঁকে বলো তো x-এর কোন কোন value-তে ওটা stationary? ■

Exercise 9: x^3-এর গ্রাফটা মনে মনে কল্পনা করো। কোথায় কোথায় ওটা decreasing? ■

8.4 চতুর্থ ধাপ--tangent

এবার আমরা যেকোনো curve-এর যেকোনো বিন্দুতে slope বার করার জন্য একটা অংকের কায়দা শিখব। এর জন্য প্রথমে বুঝতে হবে tangent বলে একটা ধারণা।
যদি curve-টা একটা সরলরেখা হয়, তবে তাকে $mx + c$ আকারে লিখে দিব্যি slope-টাকে অংকের ভাষায় m লেখা গিয়েছিল। যে কোনো curve-এর বেলাতেই আমরা সেইভাবেই এগোব। তার জন্য প্রধান হাতিয়ার হল এই ব্যাপারটা--

> একটা curve-এর খুব অল্প অংশই যদি আমাদের চোখে পড়ে, তবে সেই অংশটুকুকে সাধারণতঃ সোজা বলেই মনে হয়।

এইটাই হল ক্যালকুলাসের মূলমন্ত্র। ব্যাপারটা আমাদের দৈনন্দিন অভিজ্ঞতার বিভিন্ন উদাহরণ থেকেই দেখা যায়।

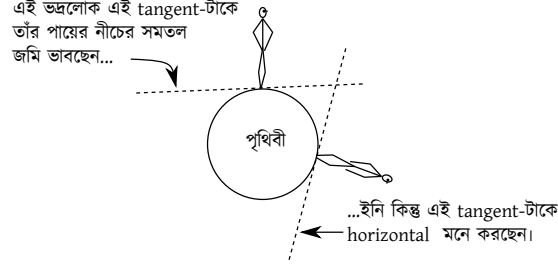



Fig 21

Example 14: পৃথিবীটা তো গোল, কিন্তু পায়ের নীচে জমির দিকে তাকিয়ে দ্যাখো তো, গোল বলে মনে হচ্ছে কি? না, বরং দিব্যি চ্যাপ্টা সমতল বলেই তো বোধ হচ্ছে! পৃথিবীর যেখানেই যাও, একই ব্যাপার। পায়ের তলার জমি সবার কাছেই সমতল। তবে পৃথিবী গোল হয় কী করে?

SOLUTION: তার কারণ আর কিছুই নয়, আমাদের দৃষ্টির পাল্লায় যতটা ধরে, পৃথিবীটা আসলে তার তুলনায় মস্ত বড়। তাই পৃথিবীর খুব অল্প অংশই আমাদের নজরে আসে। ফলে সেই অংশটুকু আমাদের চোখে সোজা বলেই মনে হয়।

পৃথিবীটা যে আসলে ঠিক সমতল নয়, সেটা অনুভব করার জন্য কিছু পদ্ধতি আছে, যেগুলো আমরা ছোটোবেলায় ভূগোল বইতে শিখে থাকি। যেমন-- কোনো উপগ্রহ থেকে পৃথিবীটাকে দেখা, বা দিগন্তবিস্তৃত সমুদ্রে দূরের কোনো জাহাজের মাস্তুলের দিকে তাকানো, এইরকম। লক্ষ করো, এদের সবগুলোরই মূল কথা হল পৃথিবীর যতটা অংশ এমনিতে চোখে পড়ে, তার চেয়ে বেশী অংশ দেখা। তাহলেই বোঝো--যেই বেশী দূর অব্ধি দেখতে পাচ্ছি অমনি ভূপৃষ্ঠের বক্রতা টের পাওয়া যাচ্ছে। ■

কোনো curve-এর কোনো বিন্দুতে দাঁড়িয়ে যদি খুব অল্প দূর অব্ধি দেখা যায়, তবে curve-টার ওই অংশটুকুকে যে সরলরেখার মত মনে হয়, তাকেই বলে ওই বিন্দুতে curve-টার **tangent** (স্পর্শক)। অর্থাৎ পৃথিবীটাকে যদি একটা গোলের মত আঁকা যায়, তবে তুমি তোমার পায়ের নীচের মাটিটাকে যে সমতল ভাবছ, সেটা ছবিতে হবে গোলটার একটা tangent. বোঝার জন্য Fig 21 দ্যাখো।

Tangent যে খালি circle-দেরই হয় এমন কিন্তু নয়। অন্য curve-দেরও হতে পারে। যেমন ধরো নীচের উদাহরণে।

Example 15: Fig 22-এ একটা বাঁকানো তার রয়েছে, আর তার উপর দুটো বিন্দু A আর B-তে দুটো পিঁপড়ে আছে। প্রত্যেকটা পিঁপড়েই কিন্তু মনে করছে যে, সে একটা সোজা তার বরাবরই যাচ্ছে। A বিন্দুর পিঁপড়েটা হেলানো দিকটাকেই horizontal ভাবছে, আর B-এর পিঁপড়েটা vertical-টাকে horizontal ভাবছে! আসল ব্যাপারটা বুঝছি খালি আমরা, যারা পুরো তারটাকেই বাইরে থেকে দেখতে পাচ্ছি। ■

রথযাত্রা লোকারণ্য মহাধূমধাম,
ভক্তেরা লুটায়ে পথে করিছে প্রণাম।
রথ ভাবে "আমি দেব", পথ ভাবে "আমি",
মূর্তি ভাবে "আমি দেব", হাসেন অন্তর্যামী।

--রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

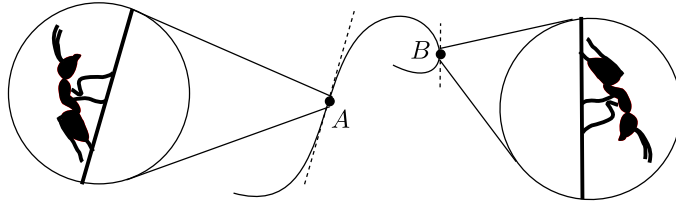



Fig 22 **Fig 23**

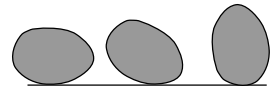
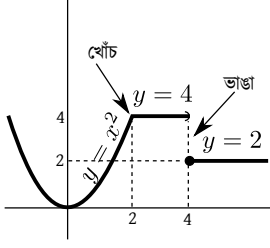
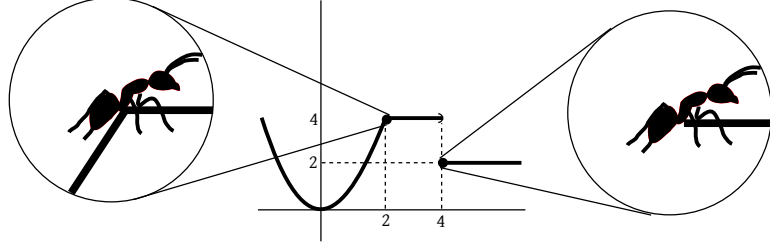



Fig 24 **Fig 25**

Tangent-এর আরেকটা দৈনন্দিন উদাহরণ এখানে না বললেই নয়। সেটা আমরা অনায়াসেই হাতেকলমে করে দেখতে পারি। একটা ডিম নাও। সেটাকে একটা টেবিলের উপর ছোঁয়াও (Fig 23)। যেভাবেই কাজটা করো না কেন দেখবে যে, টেবিলটা সর্বদাই ওই ছোঁয়ানোর বিন্দুতে ডিমের গায় একটা tangent হচ্ছে! শুধু ডিম বলে নয়, যেকোনো মসৃণ জিনিসের ক্ষেত্রেই এই একই ব্যাপার হবে। আলু, বেগুন, মোবাইল ফোন, ফুলদানী, এরকম যে কোনো জিনিসের গায়ের কোনো মসৃণ বিন্দু যদি টেবিলে ছোঁয়াও, তবেও একই ব্যাপার দেখবে।
এখানে ওই ছোঁয়ানোর বিন্দুতে curve-টার "মসৃণ" হওয়াটা খুবই জরুরী। "মসৃণ" অর্থাৎ কিনা ওখানে কোনো "ভাঙা" বা "খোঁচ" নেই। এখানে "ভাঙা" আর "খোঁচ' বলতে কী বোঝাচ্ছি, সেটা Fig 24 দেখলে বুঝবে। এখানে এই function-টার গ্রাফ আঁকা আছে--

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \leq 2 \\ 4 & \text{if } 2 < x < 4 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

এই গ্রাফে $x = 2$-তে একটা খোঁচ আছে, আর $x = 4$-এ একটা ভাঙা আছে।
মনে রেখো কোনো curve-এর কোথাও খোঁচ বা ভাঙা থাকলে সেখানে কোনো tangent থাকে না। অনেককে ভুল করে বলতে শুনেছি যে, খোঁচের জায়গাতে আসলে অনেকগুলো tangent হয়। এই ধারণা কিন্তু সঠিক নয়। খোঁচ বা ভাঙার বিন্দুতে কোনোই tangent হয় না, ব্যস্!
Tangent আঁকতে পারার জন্য মসৃণ হওয়াটা কেন জরুরী, সেটা আবার পিঁপড়ের উদাহরণ দিয়ে ভাবলেই বুঝবে।

Example 16: এবার আমরা Fig 24-এর গ্রাফটা নিয়েই আবার কাজ করব। মনে করি যেন গ্রাফটা লোহার তার দিয়ে তৈরী, আর এর উপরে $x = 2$ আর $x = 4$-এ একটা করে পিঁপড়ে আছে (Fig 25)। এখানে $x = 2$-এর পিঁপড়েটা যত অল্প জায়গাই দেখতে পাক না কেন, তাও ঠিক বুঝতে পারবে যে ওখানে একটা খোঁচ আছে। একইভাবে অন্য পিঁপড়েটাও টের পাবে যে, ওখানে একটা ভাঙা আছে (মানে লাইনটা হঠাৎ বেমালুম শূন্যে ঝুলছে!)। ■

আমরা আপাততঃ এই দুটো সম্ভাবনা (ভাঙা আর খোঁচ) নিয়ে মাথা ঘামাব না। বাকি সব ক্ষেত্রেই একটা আঁকা বাঁকা গ্রাফের খুব অল্প একটু জায়গা দেখলে সেটাকে দিব্যি সোজা বলেই মনে হয়, এবং তাই চোখের আন্দাজেই tangent আঁকা যায়। চোখের আন্দাজে tangent আঁকতে পারলে অনেক সময়ে সুবিধা হবে। তাই নীচের অংকটা করে একটু হাত পাকিয়ে নাও।

Exercise 10: Fig 26-এ একটা curve আর তার উপরে কয়েকটা বিন্দু রয়েছে। প্রতিটা বিন্দুতে চোখের আন্দাজে tangent আঁকো। ■

Fig 26

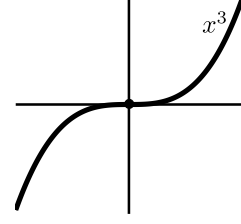



Fig 27 **Fig 28**

Exercise 11: Fig 27-এ একটা curve দেখিয়েছি। তোমাকে বলতে হবে এর কোন্ কোন্ বিন্দুতে tangent-টা horizontal হবে, এবং কোন্ কোন্ বিন্দুতে vertical হবে। ■

Tangent-এর বাংলা হল স্পর্শক। কথাটা শুনেই কেমন যেন মনে হয় যেন tangent এমন একটা সরলরেখা যেটা curve-টাকে খালি আলতো করে স্পর্শই করতে পারে, কেটে বেরিয়ে যেতে পারে না। Circle-দের tangent-এর বেলায় এই ধারণা সঠিক হলেও, অন্যান্য curve-দের বেলায় নাও হতে পারে। আগের অংক দুটোতেই সেরকম কিছু উদাহরণ ছিল। নীচের উদাহরণে ব্যাপারটা আরো স্পষ্ট করে দেখিয়েছি।

Example 17: Fig 28-এ x^3-এর গ্রাফ এঁকেছি। চট্ করে বলো তো $x = 0$-তে ওর tangent-টা কীরকম হবে!

SOLUTION: এখানে x-axis-টাই হবে tangent. চোখের আন্দাজেই মোটামুটি বোঝা যায় সেটা। দেখতেই পারছ যে, এই tangent-টা গ্রাফটাকে কেটে বেরিয়ে গেছে। ■

এইখানে একটা সমস্যা মনে হতে পারে। কী করে জোর দিয়ে বললাম যে, এই উদাহরণে x-axis-টাই tangent হবে? চোখের আন্দাজের মুস্কিল এখানেই, ওর ভিত্তিতে জোর দিয়ে কিছু বলা মুস্কিল। এই সমস্যাটারই সমাধান করেছিলেন নিউটন আর লাইবনিৎস্। তাঁরা এমন একটা কায়দা বার করেছিলেন, যার জন্য চোখের আন্দাজের কোনো দরকারই পড়ে না। ফর্মুলা ব্যবহার করে অংক কষেই tangent বার করে ফেলা যায়! কায়দাটা ভীষণ কঠিন কিছু নয়, কিন্তু পুরো গল্পটা বেশ লম্বা, এবং প্রথমবার শেখার সময়ে বারবার গুলিয়ে যেতে চাইবে। তাই আপাততঃ পুরো গল্পটার মধ্যে না গিয়ে ওটাকে এ বইয়ের শেষ অধ্যায়ের জন্য মুলতুবি রাখা যাক। কিন্তু সেই জটিল গল্প না জেনেও শেষ পর্যন্ত কায়দাটা কী দাঁড়ায়, সেটা দিব্যি শেখা যায়। ঠিক যেমন খবরকাগজ পড়বার জন্য ছাপাখানার যন্ত্রের খুঁটিনাটি জানার দরকার পড়ে না।
কিন্তু আজকে অনেকটা পড়া হয়ে গেছে। তাই কায়দাটা আমরা কালকে শিখব।

DAY 9
Function-এর differentiation (theory 1)

গতকাল যা শিখেছি তার মোদ্দা কথাটা প্রথমে মনে করিয়ে দিই। ধরো একটা curve আছে, আর তার উপরে একটা বিন্দু দেওয়া আছে (Fig 29)। সেই বিন্দুতে curve-টার slope বার করতে হবে। পদ্ধতিটা হল--

> প্রথমে দেখে নিতে হবে ওখানে যেন কোনো ভাঙা বা খোঁচ না থাকে। তাহলে ওখানে tangent আঁকা যাবে। এবার tangent-টাকে $mx + c$ আকারে লিখতে হবে। বুঝতেই পারছ যে, tangent-টা একটা vertical লাইন হয়ে গেলে সেটা করা যাবে না। অন্য সবক্ষেত্রে কোনো অসুবিধা নেই। এইভাবে যে m-টা পেলে, সেটাকেই বলব ওই curve-এর ওই বিন্দুতে slope.

আমরা আজকে ফর্মুলার সাহায্যে কোনো curve-এর কোনো বিন্দুতে slope বার করা শিখব। প্রথমে কাজ করব সেইসব curve নিয়ে যারা কোনো function-এর গ্রাফ (Fig 30 দ্যাখো)। যদি function-টার নাম $f(x)$ হয়, আর আমরা slope-টা বার করি গ্রাফের উপর $x = a$ বিন্দুতে, তবে slope-টাকে আমরা বলি $x = a$-তে $f(x)$-এর **derivative** (ডেরিভেটিভ্)

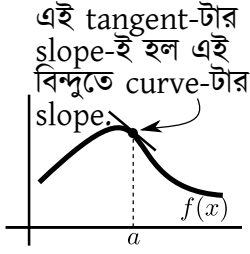
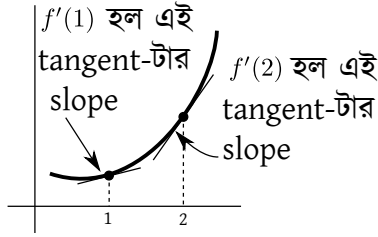
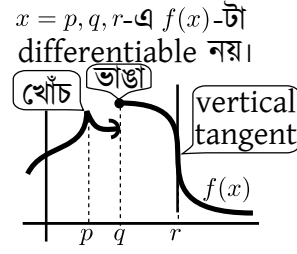



Fig 29 **Fig 30** **Fig 31**

বা **differential coefficient** (ডিফারেন্সিয়াল কোএফিসিয়েন্ট)। এই derivative বা differential coefficient বার করাকেই বলে **differentiation.**

Differentiation করার পথে খালি তিনটে বিপদ হতে পারে--এক, ভাঙা, দুই, খোঁচ, আর তিন, tangent-টা vertical হয়ে যাওয়া। এই তিনটের একটাও যদি কোনো বিন্দুতে হয়, তবে বলব যে সেখানে function-টা **differentiable** নয়, নইলে বলব differentiable. বোঝার জন্য Fig 31 দেখে নাও।

বেশ কয়েকটা নতুন ভাষা শেখা হল। এবার কয়েকটা লেখার কায়দা শিখব। ধরো একটা function-কে differentiate করছি। তাহলে x-এর যেসব value-তে function-টা differentiable হবে, সেইরকম প্রতিটা value-তে তার derivative-টা একটা সংখ্যা হবে। এদের নিয়ে একটা নতুন function পাওয়া যাচ্ছে। মূল function-টাকে $f(x)$ বললে এই নতুন function-টাকে বলে $f'(x)$ (মুখে বলি f ড্যাশ্ x, বা f প্রাইম x)। অর্থাৎ function-এর নামের পরে উপর দিকে একটা ছোটো দাগ বসিয়ে দেওয়া। যদি মূল function-টাকে বলতাম $g(t)$, তবে তার derivative-কে বলব $g'(t)$, এইরকম। লেখার আরেকটাও কায়দা আছে--যদি $y = f(x)$ লেখা হয় তবে $f'(x)$ না লিখে $\frac{dy}{dx}$-ও লেখা হয়। যদি x-এর কোনো বিশেষ value-তে (যেমন $x = a$-তে) derivative বোঝাতে চাই, তবে লিখব $f'(a)$ বা $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$.

গুলিয়ে যাচ্ছে? একটা সহজ উদাহরণ দেখলেই বোঝা যাবে।

Example 18: যদি $f(x) = 2x + 1$ তবে $f'(x)$ বার করো।

SOLUTION: $f(x)$-এর চেহারা দেখেই বুঝতে পারছ যে, গ্রাফটা একটা সরলরেখা (Fig 32)। এর slope সর্বত্রই 2, কারণ $mx + c$ আকারে লিখলে এখানে $m = 2$ হচ্ছে। তাই বলব যে, x-এর সব value-র জন্যই $f'(x) = 2$. যদি $y = 2x + 1$ লিখতাম, তবে $\frac{dy}{dx} = 2$ হত। Derivative-টার গ্রাফ দেখিয়েছি Fig 33-এ। ■

এখানে $f(x)$-এর গ্রাফটা সরলরেখা ছিল, তাই $f'(x)$ চট্ করে বার করে ফেলা গেল। এবারে একটা উদাহরণ দেখি যেখানে গ্রাফটা সরলরেখা না হলেও slope বার করা সহজ।

Example 19: $f(x) = |x|$-এর derivative বার করো।

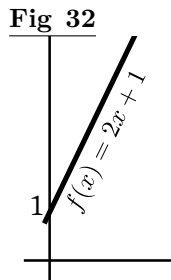
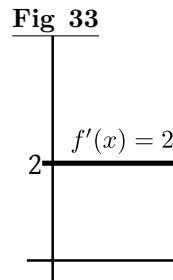



Fig 32 **Fig 33**

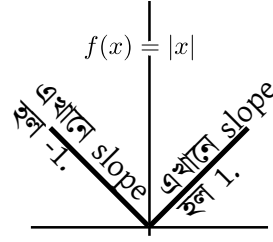
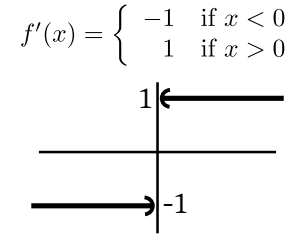



Fig 34 **Fig 35**

SOLUTION: Fig ??-এ $|x|$-এর গ্রাফটার দিকে তাকালেই বুঝবে যে

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}.$$

আর $x = 0$ হলে? সেখানে গ্রাফে একটা খোঁচ আছে, তাই differentiable নয়। সেই কারণে $f'(0)$ হল undefined. $f'(x)$-এর গ্রাফটা রয়েছে Fig 35-এ। ■

এই অংক দুটোতে গ্রাফগুলো সরলরেখা দিয়ে তৈরী ছিল, তাই tangent বার করতে ঝকমারি হয়নি। আরো জটিল function-এর ক্ষেত্রে প্রথমে tangent বার করে নিতে হত, যার খুঁটিনাটি আমরা চতুর্থ অধ্যায়ে শিখব, আপাততঃ কয়েকটা পরিচিত $f(x)$-এর জন্য $f'(x)$ কী হয়, সেটা শিখে রাখি।

9.1 কিছু পরিচিত function-এর derivative

9.1.1 Power-জাতীয় function

প্রথমে এই টেবিলটা দ্যাখো--

$f(x)$		Domain	কোথায় differentiable	$f'(x)$
$mx + c$	m, c যেকোনো সংখ্যা	$\mathbb{R}$	domain-এর সর্বত্র	m
x^a	$a \neq 0$ যেকোনো সংখ্যা	$\mathbb{R}$	domain-এর সর্বত্র	ax^{a-1}

এই টেবিলে কী রয়েছে বোঝা যাক। একেবারে প্রথম লাইনটা বলছে যে, যদি $f(x) = mx + c$ হয়, তবে $f'(x) = m$ হবে। এটা আমরা আগেই দেখেছি। চট্ করে এটা ব্যবহার করে আরো কয়েকটা অংক করে ফেলি।

Example 20: Differentiate করো--

(*i*) $2x + 3$ (*ii*) $2x + 30$ (*iii*) $2x - 300$ (*iv*) x (*v*) 20

SOLUTION: প্রথম তিনটের বেলায় প্রতিক্ষেত্রেই $m = 2$ (যদিও c বিভিন্ন)। কিন্তু আমাদের c নিয়ে মাথাব্যথা নেই, আমাদের দরকার slope, মানে m. তাই প্রথম তিনটের বেলাতেই উত্তর হবে 2. চার নম্বরে আছে $x = 1 \times x + 0$. সুতরাং এখানে $m = 1$ আর $c = 0$. উত্তর হবে m-টা, মানে 1. শেষেরটা তো একটা **constant function**, $20 = 0 \times x + 20$. তাই উত্তর হবে 0. ■

Exercise 12: Differentiate করো--

(*i*) $3x - 2$ (*ii*) $-x + 2$ (*iii*) $5 + 4x$ (*iv*) $3(x - 2)$ ■

টেবিলের পরবর্তী লাইনে বলা আছে x-এর বিভিন্ন power-দের কী করে differentiate করতে হয়। যদি x^a-কে differentiate করতে চাও, তবে উত্তর হবে ax^{a-1}, মানে উপরতলার সংখ্যাটার এক কপি x-এর বাঁদিকে এল, আর উপরতলার সংখ্যাটা নিজে এক কমে গেল।

Example 21: Differentiate করো--

(*i*) x^2 (*ii*) x^3 (*iii*) $x^{1/2}$ (*iv*) x^{-2}

SOLUTION:

1. এখানে x^2-এর উপরতলায় আছে 2. সেটাকে কপি করে x-এর বাঁদিকে বসিয়ে দিলে হয় $2x^2$, এবার উপরতলার সংখ্যাটাকে এক কমিয়ে দিলে হয় $2x^{2-1} = 2x^1$, অর্থাৎ $2x$. এটাই উত্তর। গুছিয়ে লেখার সময়ে অবশ্য এক লাইনেই সেরে দেওয়া যায়--
$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x^{2-1} = 2x.$$
2. একইভাবে x^3-কে differentiate করলে হবে
$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2.$$
3. এখানে উপরতলায় আছে $\frac{1}{2}$. সুতরাং উত্তর হবে
$$\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$
4. x^{-2}-কে differentiate করলে পাবে
$$\frac{d(x^{-2})}{dx} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}.$$

■

এই অংকটা একেবারেই যন্ত্রের মত করলাম। সত্যিই যে এর ফলে slope বেরোল, সেটা একটু ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক নীচের অংকে।

Example 22: Fig 36-এ $f(x) = x^2$-এর গ্রাফ এঁকেছি। এখানে $x = 1$-এ derivative-টা, মানে $f'(1)$, বার করো। তারপর ওই slope নিয়ে ওই বিন্দু দিয়ে একটা সরলরেখা এঁকে দ্যাখো তো সত্যিই tangent হচ্ছে কিনা।

Fig 36

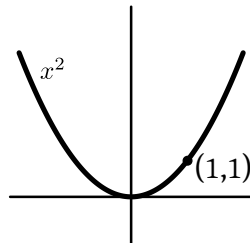
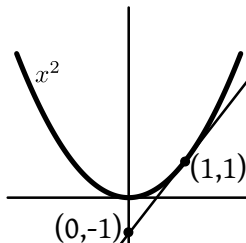



Fig 37

SOLUTION: এখানে $f'(x) = 2x$. তাই $f'(1) = 2$. এবার যে সরলরেখাটা আঁকতে হবে, সেটাকে যদি $mx + c$ আকারে লিখি, তবে $m = 2$ পেয়ে গেলাম। এবার c নিতে হবে এমনভাবে যাতে সরলরেখাটা ওই বিন্দু দিয়ে (মানে $(1, 1)$ দিয়ে) যায়, অর্থাৎ $x = 1$ বসালে যেন $mx + c = 1$ হয়। সুতরাং

$$2 \times 1 + c = 1,$$

অর্থাৎ $c = -1$. তাহলে সরলরেখাটা হল $mx+c = 2x-1$. এটাকে আঁকার জন্য এর উপর দুটো বিন্দু পেলেই হল। একটা তো দেওয়াই আছে, $(1, 1)$. এবার যদি x-এর অন্য কোনো value নিই, যেমন ধরো $x = 0$, তবে $2x - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$. সুতরাং $(0, -1)$ হল সরলরেখাটার উপর আরেকটা বিন্দু। এই দুটো বিন্দু দিয়ে একটা সরলরেখা টেনে দিলেই পাবে Fig 37। হ্যাঁ, ঠিকই, tangent-ই হয়েছে বটে! ■

এবার একটা notation-এর কথা বলে রাখি যেটা তোমরা স্কুলে থাকতেই শিখেছ, কিন্তু হয়তো ভুলে গেছ। কোনো power-এর উপরতলায়[1] ভগ্নাংশ বা negative সংখ্যা থাকার মানে কী? $x^{1/2}$ মানে $\sqrt{x}$. আবার $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$. একইভাবে যেকোনো $n = 1, 2, 3, ...$-র জন্যই $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. যদি লিখি $x^{2/5}$ তার মানে হবে $\left(x^{1/5}\right)^2 = (\sqrt[5]{x})^2$. অবশ্য এরকম বিদঘুটে জিনিস না লিখে $x^{2/5}$ লেখাই সুবিধাজনক।
যদি x^{-a} দ্যাখো, তার মানে হল $\frac{1}{x^a}$, তা সে a যাই হোক না কেন!
এই কটা জিনিস মাথায় রেখে নীচের অংকটা করে ফ্যালো দেখি।

Exercise 13: Differentiate করো--
(i) x^3 (ii) $\sqrt{x}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ (iv) x^{-3}
■

আমরা এখানে কোনো function-এর চেহারা দেখে তাকে differentiate করতে শিখছি, যেমন $mx + c$ চেহারার হলে একভাবে, আবার x^a চেহারার হলে আরেকভাবে, এইরকম। অনেকসময়ে একই function-কে একাধিক চেহারায় প্রকাশ করা যায়। তখন যে চেহারাটা ধরেই এগোও না কেন, একই উত্তর পাওয়া উচিত। এরকম একটা উদাহরণ দিলাম নীচের অংকটায়।

Exercise 14: ধরো তোমাকে $f(x) = x$-কে differentiate করতে বললাম। সেটা তুমি দুভাবে করতে পারো--এক, x-কে $mx + c$ আকারে লিখে, আর দুই, x-কে x^1 আকারে লিখে। দুভাবেই করে দ্যাখো তো একই উত্তর হচ্ছে কিনা। ■

এতক্ষণ বিভিন্ন power-দের differentiate করতে শিখলাম, যেখানে x আছে নীচের তলায়, আর উপরতলায় আছে একটা সংখ্যা (মানে exponent-টা একটা সংখ্যা)। এবার দেখব উল্টো ব্যাপারটা--এমন power যেখানে x আছে উপরে আর একটা সংখ্যা আছে নীচে, যেমন 2^x. তার জন্য এই টেবিলটা কাজে দেবে--

[1]কোনো power-এর উপরতলার সংখ্যাটাকে বলে **exponent**.

$f(x)$		Domain	কোথায় differentiable	$f'(x)$
e^x		$\mathbb{R}$	domain-এর সর্বত্র	e^x
a^x	$a > 0$ যেকোনো সংখ্যা	$\mathbb{R}$	domain-এর সর্বত্র	$a^x \log_e a$
$\log_e x$		$(0, \infty)$	domain-এর সর্বত্র	$\frac{1}{x}$

লক্ষ করো e^x এমন একটা function, যাকে differentiate করলে বদলায় না।

Example 23: 2^x-কে differentiate করলে কী হবে?

SOLUTION: টেবিলের দ্বিতীয় লাইনটা বলে দিচ্ছে কী করতে হবে। সেখানে $a = 2$ বসালেই পাবে--

$$\frac{d(2^x)}{dx} = 2^x \log_e 2.$$

■

Exercise 15: যদি $x > 0$ হয়, তবে $\frac{d}{dx} \log_e x = ?$ ■

9.1.2 Trigonometric function

Power-দের differentiate করা শেখা হল, এবার trigonometric function-দের differentiate করা শিখব। কায়দাটা বলা আছে এই টেবিলটায়--

$f(x)$	Domain	কোথায় differentiable	$f'(x)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	domain-এর সর্বত্র	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	domain-এর সর্বত্র	$-\sin x$
$\tan x$	$x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$	domain-এর সর্বত্র	$\sec^2 x$

Exercise 16: Fig 38-এ $\sin x$ আর $\cos x$-এর গ্রাফ দেখিয়েছি। চোখের আন্দাজে দ্যাখো তো কোথায় কোথায় $\sin x$-এর গ্রাফে slope-টা 0 হচ্ছে। সেইসব জায়গায় $\cos x$-এর value-ও 0 হওয়া উচিত (কারণ $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$), সত্যিই হচ্ছে তো? ■

লক্ষ করো এখানে আমরা $\cot x, \operatorname{cosec} x$ আর $\sec x$-কে কী করে differentiate করতে হবে সেটা বলি নি। আসলে $\sin x$, $\cos x$ আর $\tan x$-এর derivative জানলেই ওদের derivative-ও একটা কায়দা করে বার করে ফেলা যায়। সেই কায়দাটা আমরা কালকে শিখব।

Fig 38

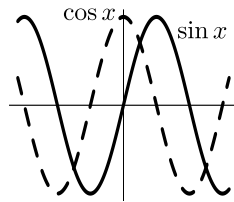
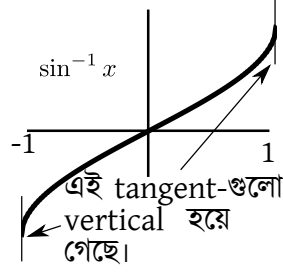
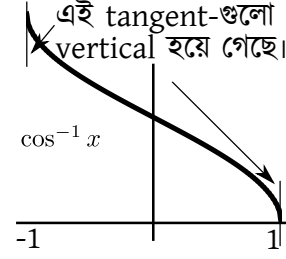



Fig 39 **Fig 40**

9.1.3 Inverse trigonometric function

এবার কয়েকটা inverse trigonometric function-এর derivative শিখব--

$f(x)$	Domain	কোথায় differentiable	$f'(x)$
$\sin^{-1} x$	$[-1,1]$	$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$[-1,1]$	$(-1,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\mathbb{R}$	domain-এর সর্বত্র	$\frac{1}{1+x^2}$

লক্ষ করো $\sin^{-1} x$ আর $\cos^{-1} x$-এর বেলায় domain যদিও $[-1,1]$, কিন্তু ওদের differentiate করা যায় কেবল $(-1,1)$-এর উপর। আসলে যদি $x=-1$ বা $x=1$ হয়, তবে ওদের tangent-গুলো vertical হয়ে যায়, তাই আর $mx+c$ আকারে লেখা যায় না, ফলে slope-টা undefined হয়ে যায়। Fig 39 আর Fig 40 দেখলেই ব্যাপারটা বুঝতে পারবে।

DAY 10
Function-এর differentiation (theory 2)

10.1 সহজ থেকে জটিল

আমরা বেশ কয়েকটা function-এর derivative বার করা শিখেছি। এবার শিখব এদেরকে মিলিয়েজুলিয়ে তৈরী নতুন নতুন function-দের কী করে differentiate করতে হয়।

10.1.1 সংখ্যা দিয়ে যোগ গুণ

একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 24: আমরা জানি যে x^2-কে differentiate করলে $2x$ হয়। এই তথ্যটা ব্যবহার করে x^2+1-কে কীভাবে differentiate করবে?

SOLUTION: প্রথমে x^2 আর x^2+1-এর সম্পর্কটা গ্রাফ এঁকে বুঝে নিই (Fig 41)। দেখতেই পাচ্ছ যে x^2-এর গ্রাফটাকে একঘর উপরে তুলে দিলেই x^2+1-এর গ্রাফ পাওয়া যায়। সুতরাং x-এর যাই value নাও না কেন (ধরো $x=a$), সেখানে x^2-এর গ্রাফের tangent-টাকে এক ঘর তুলে দিলেই x^2+1-এর গ্রাফের tangent-টা পেয়ে যাবে। অতএব দুটো গ্রাফের tangent-ই পরস্পরের সঙ্গে parallel (সমান্তরাল), তাই ওদের slope-ও সমান। তাই x^2-কে differentiate করলে যা পেতে x^2+1-কে differentiate করলেও ঠিক তাই-ই পাবে--

$$\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

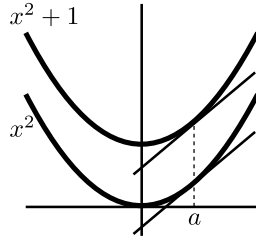



Fig 41

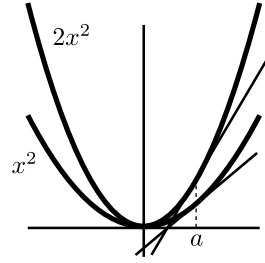



Fig 42

■

এই ব্যাপারটা যেকোনো function-এর ক্ষেত্রেই খাটে-- যদি $f(x)$-এর সঙ্গে কোনো সংখ্যা c যোগ করে $f(x)+c$ বানাও, তবে $f(x)+c$ আর $f(x)$-এর derivative একই হবে।

Exercise 17: $\frac{d}{dx}(2+\sin x) = ?$ ■

তাহলে দেখলাম যে, কোনো function-এর সঙ্গে কোনো সংখ্যা যোগ (বা বিয়োগ) করলে derivative-এর উপর তার কোনো প্রভাব পড়ে না। এবার দেখি কোনো সংখ্যা দিয়ে গুণ (বা ভাগ) করলে কী হয়।

Example 25: আমরা জানি $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. তা থেকে বার করতে হবে $\frac{d}{dx}(2x^2) = ?$

SOLUTION: x^2 আর $2x^2$-এর সম্পর্কটা গ্রাফ থেকে বুঝে নাও (Fig 42)। x^2-এর গ্রাফটাকে vertical দিকে টেনে দ্বিগুণ লম্বা করে দিলে $2x^2$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়। তাই tangent-টাও দ্বিগুণ খাড়া হয়ে যাবে। সুতরাং $2x^2$-এর derivative হবে x^2-এর derivative-এর ডবল--

$$\frac{d}{dx}(2x^2) = 2\frac{d}{dx}(x^2) = 2 \times 2x = 4x.$$

■

সুতরাং জানা গেল--

কোনো $f(x)$-এর সঙ্গে কোনো সংখ্যা b গুণ আর কোনো সংখ্যা c যোগ করে $bf(x)+c$ বানালে, differentiate করার সময়ে b-টা "বাইরে বেরিয়ে আসে" আর c-টা "নেই হয়ে যায়", অর্থাৎ--

$$\frac{d}{dx}(bf(x)+c) = b\frac{d\,f(x)}{dx}.$$

Exercise 18: Differentiate করো--
(i) $2(\cos x) - 3$ (ii) $\frac{1}{2}e^x + 10$ (iii) $\frac{3-\log_e x}{2}$. ■

10.1.2 যোগ, বিয়োগ

এবার আমরা শিখব কিছু পরিচিত function-কে যোগ বা বিয়োগ করে নতুন function বানালে তাদের কী করে differentiate করতে হয়।

Example 26: $x^2 + \sin x$-কে differentiate করো।

SOLUTION: এই function-টা দুটো পরিচিত function-কে যোগ করে পাওয়া গেছে, x^2 আর $\sin x$. আমরা জানি যে

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \text{ আর } \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

এদের যোগফলের derivative বার করার কায়দাটা হল স্রেফ এই দুটো derivative-কে যোগ করে দেওয়া, মানে

$$\frac{d}{dx}(x^2 + \sin x) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin x) = 2x + \cos x.$$

■

একইরকম ব্যাপার বিয়োগের বেলাতেও খাটে, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 27: $e^x - \cos x + \tan x$-কে differentiate করো।

SOLUTION: প্রত্যেকটা অংশকে আলাদা করে differentiate করো--

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x.$$

তারপর ওদেরকে যোগ-বিয়োগ দিয়ে জুড়ে দাও--

$$\frac{d}{dx}(e^x - \cos x + \tan x) = e^x - (-\sin x) + \sec^2 x = e^x + \sin x + \sec^2 x.$$

■

এইখানে ছাত্রছাত্রীরা অনেক সময়ে বুঝতে একটা ছোট্টো ভুল করে। সেটা এইরকম--আমি যেটা বলেছি সেটার মানে হল $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনেই differentiable হলে, $f(x) + g(x)$-ও differentiable হবে, এবং তার derivative-টা হবে $f'(x) + g'(x)$. এ থেকে অনেকে ভুল করে সিদ্ধান্ত করে বসে যে, $f(x)$ আর $g(x)$ যদি differentiable না হয়, তবে $f(x) + g(x)$-ও differentiable হতে পারে না। সেটা যে ঠিক নয়, তার জন্য নীচের অংকটা দ্যাখো।

Example 28: ধরো $f(x) = |x|$ আর $g(x) = -|x|$. তবে $f(x) + g(x)$ কি $x = 0$-তে differentiable হবে?

SOLUTION: অবশ্যই হবে, কারণ $g(x)$ তো $f(x)$-এর negative, তাই $f(x) + g(x)$ আসলে একটা constant function, যেটা সবসময়েই 0. আমরা জানি যে, constant function-রা differentiable হয় (ওদের derivative হয় 0)।
এদিকে দ্যাখো $f(x)$ বা $g(x)$ কেউই কিন্তু $x = 0$-তে differentiable ছিল না। ■

এই অংকটা থেকে শেখা গেল--"ভদ্রবাবামায়ের সন্তান ভদ্রই হয়, কিন্তু কখনো কখনো অভদ্র বাবামায়ের সন্তানও ভদ্র হতে পারে (যদি বাবার অভদ্রতা আর মায়ের অভদ্রতা কোনোভাবে কাটাকাটি হয়ে যায়)!"

Example 29: Which of the following is the value of $\frac{d}{dx}\{|x-1| + |x-5|\}$ at the point $x = 3$?

(A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4.

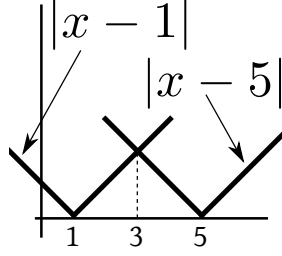



Fig 43

(HS2014.1dor)
SOLUTION: এখানে Fig 43-এ $|x-1|$ আর $|x-5|$-এর গ্রাফ এঁকেছি (খুবই সহজ, $|x|$-এর গ্রাফটাকে একবার 1 ঘর, আর অন্যবার 5 ঘর ডানদিকে সরিয়েছি)। দেখতেই পাচ্ছ যে, $x=3$-এ কারোরই খোঁচটা পড়ে নি, তাই দুজনেই ওখানে differentiable. আরো লক্ষ করো যে, ওখানে $|x-1|$-এর derivative হল 1 (যেহেতু ওর খোঁচটা $x=3$-এর বাঁদিকে), আর $|x-5|$-এর derivative-টা -1 (যেহেতু খোঁচটা ডানদিকে)। সুতরাং 1 আর -1-কে যোগ করে দিলেই উত্তর পেয়ে যাবে 0, মানে (B). ■

নীচের অংকদুটোতে **monotonic increasing** বলে একটা কথা পাবে। আসলে ব্যাকরণসম্মতভাবে কথাটা হওয়া উচিত **monotonically increasing.** এর মানে হল আমরা যাকে increasing বলে আসছি, সেটাই। একইভাবে **monotonically decreasing** মানে হবে আমরা যেটাকে decreasing বলেছি।

Example 30: If $f(x)=\mu x-\sin x,\ x>0$, is a monotonic increasing function then

(A) $\mu>-1$ (B) $\mu<1$ (C) $\mu>1$ (D) $\mu<-1$

(HS2015)
SOLUTION: এখানে $f(x)$-টা দিব্যি differentiable. তাই increasing হওয়ার জন্য $f'(x)>0$ হতে হবে। (কেন? সেটা গুলিয়ে গিয়ে থাকলে $f(x)$-এর গ্রাফটাকে একটা পাহাড়ের গা বলে কল্পনা করো, increasing মানে ওঠা, মানে slope-টা >0)। এখানে $f'(x)=\mu-\cos x$. এটাকে যদি সর্বদা >0 হতে হয়, তবে $\mu>\cos x$ হতে হয়, এবং সেটা যেকোনো $x>0$-এর জন্যই। আমরা জানি যে $\cos x$-টা সবচেয়ে বেশী উঠতে পারে 1 অব্দি। সুতরাং $\mu>1$ না হলে, $\cos x$-টা μ ছাপিয়ে উপরে উঠে যাবে। অতএব উত্তরটা (C) হতে বাধ্য। এখানে option-গুলোর মধ্যে একটু সমস্যা আছে। (C) যদি হয়, তবে (A)-ও হবে (কারণ 1-এর চেয়ে বড় কোনো সংখ্যা -1-এর চেয়ে বড় না হয়ে যায় কোথায়?)। কিন্তু খালি (A) শর্তটা পালিত হলেই কিন্তু $f'(x)>0$ হবে না! ■

Example 31: Find the values of x for which the function $f(x)=x^3-7x^2+8x-10$ is monotonic increasing.[2] **(HS2014.2fiii)**
SOLUTION:

✎ $f'(x)=3x^2-14x+8=\cdots=(3x-2)(x-4)=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-4)$.

$\therefore f'(x)>0$ if and only if $\left(x-\frac{2}{3}\right)$ and $(x-4)$ are both >0 or both <0,

ie, if and only if $x<\frac{2}{3}$ or $x>4$.

কী করে ধাঁ করে এটা লিখে দিলাম? আসলে এখানে মনে মনে গ্রাফ দিয়ে চিন্তা করেছি। $f'(x)$ একটা quadratic, সুতরাং গ্রাফটা একটা parabola, যার দু হাত উপরে তোলা, এবং x-axis-কে ছেদ করে $\frac{2}{3}$ আর 4-এ। সুতরাং গ্রাফটা নিশ্চয়ই Fig

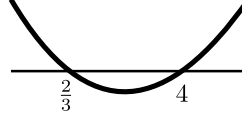



Fig 44

44-র মত কিছু একটা। এবার ভাবো এটা কোথায় কোথায় x-axis-এর উপরে আছে। ■

Exercise 19: The function $x(\alpha - x)$ is strictly increasing on the interval $0 < x < 1$ if and only if

(A) $\alpha \geq 2$ (B) $\alpha < 2$ (C) $\alpha < -1$ (D) $\alpha > 2$.

(BStat/BMath2015.23)
HINT: এখানে $x(\alpha - x)$ মানে হল $\alpha x - x^2$. একে differentiate করে দ্যাখো α-র কোন্ কোন্ value-তে এটা যেকোনো $x \in (0, 1)$-এর জন্যই > 0 হয়। তবে এইবেলা চুপিচুপি বলে রাখি যে, অংকটা কিন্তু খালি গ্রাফ দিয়ে ভাবলেই হয়ে যায়, differentiate-টিফারেনশিয়েট্ করতেই হয় না! ■

10.1.3 গুণ

গুণের কায়দাটা একটু প্যাঁচালো। প্রথমে বুঝে নাও আমরা কী করতে চলেছি--দুটো function আছে $f(x)$ আর $g(x)$, যাদেরকে গুণ করে $f(x) \times g(x)$ বানানো হয়েছে। আমাদের কাজ হল এই গুণফলটাকে differentiate করা। তার জন্য সূত্রটা এইরকম--

> x-এর যেসব value-তে $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনেই differentiable, সেইসব value-তে $f(x) \times g(x)$-ও differentiable হতে বাধ্য, এবং--
>
> $$\frac{d}{dx}(f(x) \times g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

সহজ ভাষায় বললে, $f(x)g(x)$ গুণফলটার মধ্যে প্রথমে খালি $f(x)$-কে differentiate করব ($g(x)$-কে অপরিবর্তিত রেখে), ফলে পাব $f'(x)g(x)$. তারপর খালি $g(x)$-টাকে differentiate করব ($f(x)$-কে অপরিবর্তিত রেখে), ফলে পাব $f(x)g'(x)$. এবার এ দুটোকে যোগ করে দিলে পাব $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, এবং সেটাই হবে $f(x)g(x)$-এর derivative.
একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝা যাক।

Example 32: ধরো তোমাকে বললাম $x^2 \sin x$-কে differentiate করতে হবে। কীভাবে করবে?

SOLUTION: এটা দুটো পরিচিত function-এর গুণফল, x^2 আর $\sin x$. এদের নাম দিয়ে নাও, ধরো $f(x)$ আর $g(x)$.

✎Let $f(x) = x^2$ and $g(x) = \sin x$.

চট্ করে দেখে নাও যে, এদের differentiate করতে পারছ কিনা--

✎Then we know that $f'(x) = 2x$ and $g'(x) = \cos x$.

এইবার গুণের সূত্রটা লাগিয়ে দাও--

✎So

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

একটু অভ্যাস হয়ে গেলে $f(x)$ আর $g(x)$-কে এভাবে আলাদা করে না লিখে মনে মনেই করতে পারবে। কিন্তু যতদিন না সে অভ্যাসটা হয়, ততদিন এভাবে ভেঙে ভেঙে এগোনোই ভালো। ■

যদি তিনটে বা চারটে বা তারও বেশী function-এর গুণফলকে differentiate করতে হয়, তাহলেও একইরকম ব্যাপার--ওদের প্রত্যেককে একবার করে differentiate করতে হবে, বাকিদেরকে অপরিবর্তিত রেখে, তারপর সবগুলো যোগ করতে হবে। নীচের উদাহরণটা দ্যাখো।

Example 33: $x^2 e^x \cos x$-কে differentiate করো।

SOLUTION:

✎We know

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) &= 2x \\ \frac{d}{dx}(e^x) &= e^x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 e^x \cos x) &= \frac{d}{dx}(x^2) e^x \cos x + x^2 \frac{d}{dx}(e^x) \cos x + x^2 e^x \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= 2x e^x \cos x + x^2 e^x \cos x + x^2 e^x (-\sin x) \\ &= 2x e^x \cos x + x^2 e^x \cos x - x^2 e^x \sin x. \end{aligned}$$

■

Exercise 20: Differentiate করো--
(i) $\sin x \log_e x$ (ii) $\tan^2 x$ (এটাকে $\tan x \times \tan x$ বলে ভাবো) (iii) $2x^3(3e^x + 1)\log_e x$.
■

Exercise 21: আমরা জানি যে $\sin x = \cos x \times \tan x$. দ্যাখো তো $\cos x \times \tan x$-কে গুণের সূত্র দিয়ে differentiate করলে সত্যিই $\sin x$-এর derivative আসে কিনা! ■

10.1.4 ভাগ

গুণের কায়দাটা একটু প্যাঁচালো ছিল। ভাগের কায়দাটা আরো একটু প্যাঁচালো। আবার দুটো function নিয়ে কাজ করছি, $f(x)$ আর $g(x)$. এবার ভাগ করে $f(x)/g(x)$ বানানো হয়েছে। বলাই বাহুল্য যে, এখানে x-এর সেই সব value নিয়েই কাজ করতে হবে যেখানে $g(x) \neq 0$, নইলে $g(x)$ দিয়ে ভাগ করাই যেত না। আমাদের কাজ হল এই $f(x)/g(x)$-কে differentiate করা। তার জন্য সূত্রটা এইরকম--

x-এর যেসব value-তে $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনেই differentiable (এবং $g(x) \neq 0$), সেইসব value-তে $f(x)/g(x)$-ও differentiable হতে বাধ্য, এবং তার derivative বার করা যাবে এইভাবে--

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.$$

একটা উদাহরণ দেখি।

Example 34: $\frac{\sin x}{2x+1}$-কে differentiate করো।

SOLUTION: এখানে উপরতলায় আছে $\sin x$ (যাকে আমরা সূত্র লেখার সময়ে $f(x)$ বলেছিলাম), আর নীচের তলায় $g(x)$-এর জায়গায় আছে $2x+1$. আমাদের শর্তগুলো মনে রেখো, $g(x) \neq 0$ হতে হবে, মানে $2x+1 \neq 0$, অর্থাৎ $x \neq -\frac{1}{2}$. তারপর $f(x)$ আর $g(x)$-কে differentiable হতে হবে। তাতে কোনো অসুবিধা নেই--

$$f'(x) = \cos x \text{ আর } g'(x) = 2.$$

বুঝতেই পারছ, $f(x)/g(x)$-কে differentiate করলে একটা বেশ জটিল দেখতে জিনিস আসবে, সেটাও আবার দোতলা । পুরোটা একবারে লিখে ফেললে মাথা গুলিয়ে যাবে। প্রথমে নীচের তলাটা লিখি, সেটা সহজ, স্রেফ $g(x)$-এর square–

$$\frac{\qquad\qquad}{(2x+1)^2}$$

এবার উপরতলায় প্রথমে $f'(x)$ লিখে তাকে $g(x)$ দিয়ে গুণ করে দাও, মানে--

$$\frac{\cos x(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

এবার একইরকম কাজ করো, $f(x)$ আর $g(x)$-এর স্থান বিনিময় করে, মানে $g'(x)$-কে $f(x)$ দিয়ে গুণ করে দাও--

$$\frac{\cos x(2x+1) \qquad \sin x \times 2}{(2x+1)^2}$$

এইভাবে উপরতলায় যে দুটো গুণফল পেলে তাদের মাঝে একটা মাইনাস বসিয়ে দিলেই কাজ শেষ--

$$\frac{\cos x(2x+1) - \sin x \times 2}{(2x+1)^2}$$

এবার একটু সাজিয়ে গুছিয়ে লিখলে সুন্দর লাগবে--

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{2x+1}\right) = \frac{(2x+1)\cos x - 2\sin x}{(2x+1)^2}.$$

■

Exercise 22: আমরা জানি $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. এটা ব্যবহার করে দ্যাখো তো $\tan x$-এর derivative-টা $\sec^2 x$ হচ্ছে কিনা। ■

Exercise 23: $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ আর $\cot x$-কে differentiate করো।
HINT:
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, তার মানে এখানে উপরতলায় আছে 1, যেটা একটা constant function, আর নীচের তলায় আছে $\cos x$.
■

DAY 11
Function-এর differentiation (theory 3)

11.1 Chain rule

পরিচিত function-দেরকে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি দিয়ে মিলিয়েজুলিয়ে জটিলতর function বানালে তাদের differentiate করা শিখেছি। এবার শিখব একটা function-এর পেটে আরেকটা function ঢুকে থাকলে (মানে composition-এর বেলায়) কী করে differentiate করতে হয়। Differentiation-এর যে কায়দাটা এর জন্য লাগে, সেটা ক্যালকুলাসের জগতে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ, এর নাম **chain rule**. একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 35: $\sin(\log_e x)$-কে differentiate করো।

SOLUTION: এখানে সবচেয়ে বাইরে আছে $\sin x$ তার পেটের ভিতর আছে $\log_e x$. এখানে differentiation-টা দুই ধাপে হবে।

- প্রথম ধাপে খালি বাইরের function-টাকে differentiate করব, ভিতরেরটা যেমন ছিল তাই থাকবে। আমাদের বেলায় বাইরে আছে $\sin x$, তাকে differentiate করলে হয় $\cos x$. তাই প্রথম ধাপে পাব $\cos(\log_e x)$.
- দ্বিতীয় ধাপে ঢোকার জন্য বাইরের function-টাকে ফেলে দিতে হবে, তাহলে পড়ে থাকবে $\log_e x$. এটাকে differentiate করে পাব $\frac{1}{x}$.

এই দুটো ধাপে যা যা পেলাম সেগুলোকে গুণ করে দিলেই উত্তর পেয়ে যাবে--

$$\frac{d}{dx}(\sin(\log_e x)) = \cos(\log_e x) \times \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log_e x)}{x}.$$

■

এই ধাপে ধাপে করার ব্যাপারটা আরো ভালো করে বোঝার জন্য নীচের অংকটা দ্যাখো। এটাও প্রায় আগের অংকটাই, খালি একটা ধাপ বাড়িয়েছি।

Example 36: $\sin(\log_e(x^2+1))$-কে differentiate করো।

SOLUTION: এখানে সবচেয়ে বাইরে আছে $\sin x$ তার পেটের ভিতর আছে $\log_e x$, তারও পেটের ভিতরে রয়েছে x^2+1. একরকমের পুতুল আছে, একটার ভিতর একটার ভিতর একটা ঢোকানো থাকে। আমাদের function-টাকেও সেইরকম মনে করো (Fig 45)। একে differentiate করার জন্য আমরা ধাপে ধাপে এগোব।

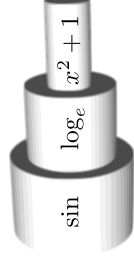
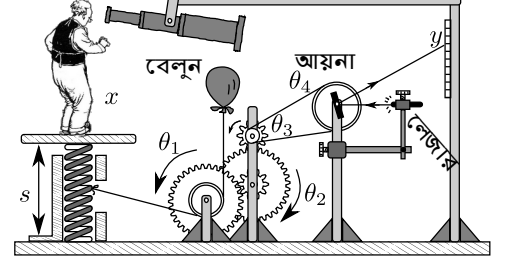



Fig 45 **Fig 46** **Fig 47**

- প্রথম ধাপে খালি বাইরের function-টাকে differentiate করব, ভিতরেরগুলো যেমন ছিল তাই থাকবে। আমাদের বেলায় বাইরে আছে $\sin x$, তাকে differentiate করলে হয় $\cos x$. তাই প্রথম ধাপে পাব $\cos(\log_e(x^2+1))$.
- দ্বিতীয় ধাপে ঢোকার জন্য বাইরের function-টাকে ফেলে দিতে হবে, তাহলে পড়ে থাকবে $\log_e(x^2+1)$. এখন সবচেয়ে বাইরে আছে $\log_e x$. এটাকে differentiate করব, ফলে পাব $\frac{1}{x}$. ভিতরে যেটা ছিল (মানে x^2+1), সেটার কোনো পরিবর্তন করব না, মানে $\frac{1}{x}$-এর পেটে x^2+1 ঢোকাব, তাতে পাওয়া যাবে $\frac{1}{x^2+1}$.
- তৃতীয় ধাপে ঢোকার জন্য ফের খোসা ছাড়াব, মানে $\log_e$-টাও ফেলে দেব। ফলে পড়ে থাকবে x^2+1. এটাকে differentiate করলে পাব $2x$.

এবার তিনটে ধাপে যা যা পেয়েছি, সেগুলোকে গুণ করে দিলেই উত্তর পেয়ে যাবে--

$$\frac{d}{dx}\sin(\log_e(x^2+1)) = \cos(\log_e(x^2+1)) \times \frac{1}{x^2+1} \times 2x = \frac{2x\cos(\log_e(x^2+1))}{x^2+1}.$$

ধাপে ধাপে খোসা ছাড়ানো এবং প্রতি ধাপে সবচেয়ে বাইরের function-টাকে differentiate করার গল্পটা Fig 46 দেখলে মনে রাখতে সুবিধা হবে। এই ছবিতে প্রতিটা ধাপে যে অংশটা differentiate করা হয়েছে সেটাকে কালো করে দেখিয়েছি। ■

সূত্রের আকারে লিখলে এইভাবে লেখা যায়--

CHAIN RULE

ধরো $f(x)$-এর পেটে $g(x)$-কে ঢুকিয়ে $f\big(g(x)\big)$ বানিয়েছি। এবার x-এর এমন কোনো value নিলাম, যেখানে $g(x)$-টা differentiable, এবং $g(x)$-এর সেই value-তে $f(x)$-টাও differentiable, তবে x-এর সেই value-তে $f\big(g(x)\big)$-ও differentiable হবে, এবং তার derivative বার করা যাবে এইভাবে--

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x).$$

আরেকটা উদাহরণ দেখি।

Example 37: $\sin^2 x$-কে differentiate করো।

SOLUTION: এখানে x^2-এর পেটে $\sin x$ ঢোকানো আছে। সুতরাং $\sin^2 x$-কে আমরা $f\big(g(x)\big)$ আকারে লিখতে পারি, যেখানে $f(x)=x^2$ আর $g(x)=\sin x$. অতএব $f'(x)=2x$ এবং $g'(x)=\cos x$.
সুতরাং chain rule থেকে পাচ্ছি

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = f'\big(g(x)\big)g'(x) = 2\sin x\cos x.$$

■

Exercise 24: Differentiate করো--
(*i*) $\sqrt{1-x^2}$. (*ii*) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (*iii*) $e^{-x^2/2}$.
HINT: এখানে দুই নম্বর অংকটায় function-টাকে $(1-x^2)^{-1/2}$ বলে ভাবলে সুবিধা হবে। ■

Chain rule-এর একটা প্রয়োগ এত বেশী হয় যে সেটাকে আলাদা করে বলে রাখি--

ধরো $f(x)$ হল differentiable কোনো function, আর a, b যেকোনো দুটো সংখ্যা। তবে

$$\frac{d}{dx}f(ax+b) = af'(ax+b).$$

Example 38: $\frac{d}{dx}\sin(2x+3) = ?$

SOLUTION: $2\cos(2x+3)$. ■

Exercise 25: Differentiate করো--
(*i*) e^{3x-5} (*ii*) $\cos(3-4x)$ (*iii*) e^{-x}. ■

11.1.1 Chain-টা কোথায়?

Chain মানে হল "শিকল"। কিন্তু এ যাবৎ যা আলোচনা শোনা গেল, তার মধ্যে শিকলের তো নামগন্ধ পেলাম না! তবে এরকম নামকরণ কেন? সেটা বোঝা যাবে chain rule-টাকে সামান্য সাজিয়ে লিখলে। ধরো $f\big(g(x)\big)$-কে differentiate করতে হবে। Chain rule বলছে--

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)\times g'(x).$$

এবার ধরো $g(x)$-এর নাম দিলে y আর $f(g(x))$-এর নাম দিলে z. মানে $y = g(x)$ আর $z = f(y)$. তাহলে chain rule-এর চেহারাটা দাঁড়াচ্ছে--

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\times\frac{dy}{dx}.$$

ঠিক যেন, ভগ্নাংশের গুণ। এখানে x, y, z-এর মধ্যে সম্পর্কটা একটা শিকলের মত--x-এর থেকে y আসছে, y-এর থেকে z. দুটো খণ্ড জুড়ে শিকলটা তৈরী, প্রত্যেকটা থেকে একটা করে derivative পাওয়া যাচ্ছে। Chain rule বলছে যে, খণ্ডগুলোর derivative-দের গুণ করে দিলেই পুরো শিকলটার derivative পাওয়া যায়। বাস্তবে অনেক বেশী সংখ্যক খণ্ডওয়ালা শিকল নিয়েও কাজ করতে হয়। যেমন ধরো, কোনো জটিল যন্ত্রের ইনপুট থেকে আউটপুট পর্যন্ত পৌঁছতে অনেকগুলো ধাপ থাকতে পারে। একটা হাস্যকর রকমের উদ্ভট[2] উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 47-এ। এই যন্ত্রটা আসলে মানুষের ওজন মাপে। লোকটার ওজন (x) হল ইনপুট, তার ফলে স্প্রিংটার দৈর্ঘ্য (S) সংকুচিত হয়, স্প্রিঙের সাথে সূতো দিয়ে গ্যাস বেলুন বাঁধা আছে, সূতোটা গেছে পুলির উপর দিয়ে। তাই S বদলালেই পুলিটা θ_1 কোণে ঘোরে, পুলির সঙ্গে গিয়ার লাগানো, সেটা আবার আরেকটা গিয়ারকে θ_2 কোণে ঘোরায়, এবং সেটা আরেকটা গিয়ারকে θ_3 কোণে ঘোরায়। এই শেষের গিয়ারটার সঙ্গে বেল্ট

[2] Rube Goldberg আর W. Heath Robinson নামের দুই শিল্পী এরকম উদ্ভট যন্ত্র আঁকার জন্য বিখ্যাত ছিলেন। Google খুঁজে দেখতে পারো।

দিয়ে একটা চাকা লাগানো, আর চাকার গায় একটা আয়না রয়েছে। সেটা θ_4 কোণে ঘোরে। ওদিকে আবার একটা লেজার রশ্মি আয়নার গায় ঠিকরে একটা স্কেলের উপর গিয়ে y বিন্দুতে পড়ে। আয়নাটা ঘুরে গেলে y-ও বদলে যায়। ভদ্রলোক স্কেলের উপর y বিন্দুটা কোথায় রয়েছে সেটা দূরবীণ দিয়ে দেখে নেন, এবং তা থেকে নিজের ওজনটা জানতে পারেন। বেশ সহজ কায়দা, কী বলো? এখানে শিকলটা হল

$$x \to S \to \theta_1 \to \theta_2 \to \theta_3 \to \theta_4 \to y.$$

সুতরাং যদি $\frac{dy}{dx}$ বার করতে চাও তবে chain rule লাগালে পাবে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dS}{dx} \times \frac{d\theta_1}{dS} \times \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \times \frac{d\theta_3}{d\theta_2} \times \frac{d\theta_4}{d\theta_3} \times \frac{dy}{d\theta_4}.$$

ডানদিকের প্রতিটা derivative আসছে যন্ত্রটার একেকটা অংশ থেকে, যেমন $\frac{dS}{dx}$ আসবে স্প্রিঙের ধর্ম থেকে, $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$ ইত্যাদিরা আসবে গিয়ারের ধর্ম থেকে, $\frac{dy}{d\theta_4}$ আসবে প্রতিফলনের সূত্র থেকে, এইরকম। আমাদের যন্ত্রটা উদ্ভট বটে, কিন্তু বাস্তবের যন্ত্রদের ক্ষেত্রেও এই কায়দাটার বহুল প্রয়োগ।

11.1.2 Inverse function-এর derivative

Chain rule-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ হল কোনো function-এর derivative জানা থাকলে তা থেকে তার inverse function-এর derivative বার করতে। অবশ্য এর জন্য function-টাকে invertible হতে হবে (নইলে আর inverse আসবে কোত্থেকে?)। কায়দাটা এইরকম--ধরো আমাদের শিকলটা একটা ফাঁসের মত, x থেকে y, আবার y থেকে x-এ ফেরত, $x \rightleftarrows y$. মানে এর শুরুতেও x, শেষেও x. সুতরাং chain rule থেকে পাচ্ছি--

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dy} \times \frac{dy}{dx}.$$

কিন্তু $\frac{dx}{dx} = 1$ (না, dx দুটো কাটাকাটি হয়ে গেল বলে নয়, এর কারণ হল x-এর গ্রাফ একটা সরলরেখা যার slope হল 1)। সুতরাং

$$\frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx}.$$

আবার ঠিক ভগ্নাংশের মত আচরণ! গ্রাফ দিয়ে ভাবলে এই ব্যাপারটা মোটেই অপ্রত্যাশিত কিছু নয়। ধরো $y = e^x$, তবে $x = \log_e x$. আমরা জানি যে, এদের গ্রাফ একটা আরেকটার প্রতিফলন (45° লাইনটা বরাবর)। সুতরাং কোনো বিন্দুতে একটার tangent প্রতিফলনের পর অন্যটার tangent-এ পরিণত হবে, প্রতিফলনের আগের slope যদি 2 হয়, তবে পরে হবে $\frac{1}{2}$.

Example 39: এই অধ্যায়ে আগে এক জায়গায় বলেছিলাম যে, $x \in (-1, 1)$ হলে $\sin^{-1} x$-এর derivative হয় $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. এটা chain rule দিয়ে প্রমাণ করো।

SOLUTION: আমরা জানি যে, যেকোনো $x \in (-1, 1)$-এর জন্যই $\sin(\sin^{-1} x) = x$ হয়[3]। সুতরাং যদি $y = \sin^{-1} x$ নিই, তবে $x = \sin y$ হবে। অতএব

$$\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y},$$

যেখানে $\cos y \neq 0$ (কারণ $x \in (-1, 1)$)। এবার উত্তরটাকে x দিয়ে লিখতে হবে। তার মানে $\cos y$-কে $\sin y$ দিয়ে লিখতে হবে, (যেহেতু $x = \sin y$)। আমরা জানি $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$. কিন্তু square root নেবার সময়ে কোন্ চিহ্নটা

[3] বস্তুতঃ, যেকোনো $x \in [-1, 1]$-এর জন্যই হয়, কিন্তু এখানে আমরা $x = -1$ আর $x = 1$ নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি না।

নেব, প্লাস নাকি মাইনাস? ভেবে দ্যাখো, $y = \sin^{-1} x$, তাই $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. এইরকম y-এর জন্য $\cos y \geq 0$ হয়, তাই প্লাস চিহ্নটাই নেব। সুতরাং পেয়ে গেলাম

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

এবার একইরকম যুক্তি দিয়ে একটা সামান্য জটিল অংক করব। প্রথমে একটু গা গরম করে নাও।

- $\sin(A - B) = ?$

উত্তর:

Example 40: If $\sin y = x \sin(a + y)$, then show that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin a}{1 - 2x \cos a + x^2}.$$

[4] **(HS2016.2ci)**

SOLUTION: এখানে y-কে x দিয়ে লেখার কোনো সহজ পথ চোখে পড়ছে না, কিন্তু x-কে y দিয়ে প্রকাশ করা সহজ। তাই ঘুরপথে এগোব, প্রথমে $\frac{dx}{dy}$ বার করে সেটাকে উল্টে $\frac{dy}{dx}$ বানাব--

✎$x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$.

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{\cos y \sin(a + y) - \sin y \cos(a + y)}{\sin^2(a + y)} = \frac{\sin(a + y - y)}{\sin^2(a + y)} = \frac{\sin a}{\sin^2(a + y)}.$$

So

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}. \qquad (*)$$

ধ্যাত্তেরি, এটা তো দেখাতে বলে নি! যেটা দেখাতে বলেছে সেটার ডানদিকে খালি x আছে, আমরা যেটা পেলাম সেটার ডানদিকে আছে খালি y. আমরা x-কে y দিয়ে লিখতে পারি। সুতরাং যেটা দেখাতে বলেছে সেখান থেকে পিছু হটতে হটতে (*)-এ পৌঁছতে পারি কিনা দেখি।

✎We have

$$\begin{aligned} 1 - 2x \cos a + x^2 &= (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2x \cos a + x^2 \\ &= \sin^2 a + (x - \cos a)^2. \end{aligned}$$

এবার $x - \cos a$-টাকে y দিয়ে লিখব--

✎Now $x - \cos a = \cdots = -\frac{\sin a \cos(a+y)}{\sin(a+y)}$.

মাঝের কয়েকটা মামূলী ধাপ তোমার জন্য ডট্ ডট্ করে ছেড়ে রেখেছি।

✎So $1 - 2x \cos a + x^2 = \cdots = \frac{\sin^2 a}{\sin^2(a+y)}$.

Thus, $\frac{\sin a}{1-2x \cos a+x^2} = \cdots = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$.

So from (*) we have $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin a}{1-2x \cos a+x^2}$, as required.

■

11.2 বার বার differentiate করা

কোনো $f(x)$-কে differentiate করলে একটা function পাওয়া যায়, $f'(x)$. যদি এই $f'(x)$-কে ফের differentiate করা যায়, তবে যে function-টা পাবে, তাকে বলে $f(x)$-এর **second derivative**. লেখার সময়ে লেখে $f''(x)$ বা $f^{(2)}(x)$ বা $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$. আর যদি $y = f(x)$ হয়, তবে একে $\frac{d^2y}{dx^2}$-ও লেখা হয়।
যদি একে ফের differentiate করা যায়, তবে পাবে **third derivative**, যাকে লেখে $f^{(3)}(x)$ বা $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ বা $\frac{d^3y}{dx^3}$. এইভাবে যতক্ষণ differentiate করা যায়, যদি করেই যেতে থাকো, তাহলে পরপর সব fourth, fifth, sixth,... ইত্যাদি সব derivative-রা আসতে থাকবে।

Example 41: যদি $f(x) = \sin x$ হয়, তবে যে $f'(x) = \cos x$ হবে, সে তো জানোই। বল তো $f''(x)$ কত হবে? আর $f^{(3)}(x)$ এবং $f^{(4)}(x)$?
SOLUTION: $f''(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x$ এবং $f^{(4)}(x) = \sin x$. ■

Exercise 26: উপরের অংকটা করার পর এক লাফে ধাঁ করে $f^{(73)}(x)$ কত হবে লিখে দিতে পারো?
■

11.2.1 ছবি দিয়ে বোঝা

ধরো একটা function আছে $f(x)$. তাকে differentiate করলে পাবে $f'(x)$. যদি $f(x)$-এর গ্রাফ দেওয়া থাকে, তবে সেটা দেখেই $f'(x)$-এর বিষয়ে যে একটা ধারণা করা যায় সেটা আমরা আগেই শিখেছি--

> যেখানে যেখানে $f(x)$-এর গ্রাফটা উঠছে, সেখানে $f'(x) > 0$ হয়, যত বেশী খাড়াই উঠবে, $f'(x)$-ও ততই বেশী হবে। একইভাবে যেখানে যেখানে $f(x)$-এর গ্রাফটা নামবে, সেখানে $f'(x) < 0$ হবে, যত খাড়া ভাবে নামবে ততই বেশী negative হবে $f'(x)$-টা।

প্রশ্ন হল, $f(x)$-এর গ্রাফ দেখে কি $f''(x)$-এর বিষয়েও কোনো ধারণা করা যায়?
উত্তর হল-- হ্যাঁ, যায়। ব্যাপারটা এইরকম। Fig 48-এ তিনটে গ্রাফ রয়েছে, দ্যাখো। এরা সকলেই কতকটা বাটির মত দেখতে (যদিও দ্বিতীয় আর তৃতীয়টা একদিকে কাত হয়ে আছে, তাই জিনিস রাখার পক্ষে ঠিক আদর্শ বাটি নয়!)। এরকম গ্রাফদের বলে **convex**. এদের বেলায় second derivative-টা সর্বদা > 0 হবে। যদি গ্রাফটা হত Fig 49-এর ওল্টানো বাটিগুলোর মত, তবে second derivative-টা সর্বদা negative হত। এদের বলে **concave**. সোজা আর উল্টো যাই হোক না কেন, বাটিগুলোর বক্রতা যত বেশী হবে, second derivative-এর absolute value-ও ততই বাড়বে (Fig 50 আর Fig 51)। অনেক function আছে, যাদের গ্রাফ সর্বত্র convex নয়, বা সর্বত্র concave-ও নয়, যেমন Fig 52। এদের বেলায়

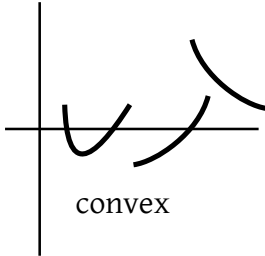
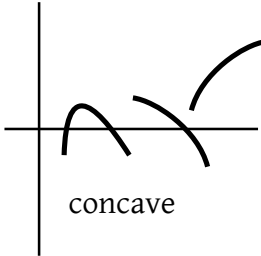
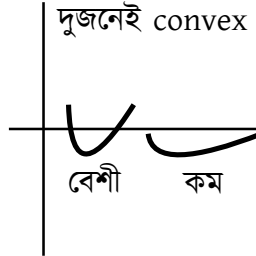
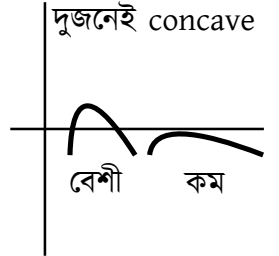
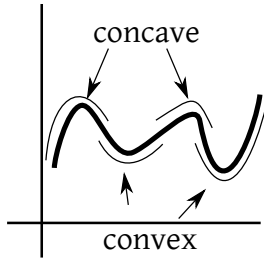



Fig 52

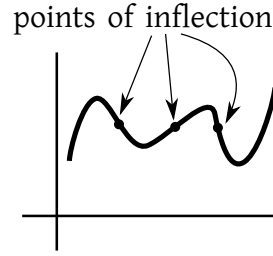



Fig 53

গ্রাফের কোনো অংশ convex (সোজা বাটির মত), কোনো অংশ আবার concave (ওল্টানো বাটির মত)। যে সব জায়গায় convex, সেখানে second derivative হবে >0 (এবং যত বেশী বক্রতা ততই বেশী positive)। একইভাবে concave জায়গাগুলোতে second derivative হবে <0 (যত বেশী বক্রতা, ততই negative)। একটা convex অংশ যেখানে শেষ হয়ে পরের concave অংশটা শুরু হয় (বা concave শেষ হয়ে convex শুরু হয়), সেই জায়গাগুলোকে বলে **point of inflection** (পয়েন্ট অফ্ ইনফ্লেক্শন)। সেই সব জায়গায় second derivative হয় 0. বোঝার জন্য Fig 53 দেখে নাও।

DAY 12
Function-এর differentiation (হাতেকলমে 1)

গত কয়েকদিন ধরে differentiate করার নানান কায়দা শিখেছি। এবার তাদের প্রয়োগ করে হাতেকলমে কিছু অংক করব। এখানে প্রতিটা অংকেরই মূল ব্যাপার মোটামুটিভাবে একই--একটা function দেওয়া থাকবে, যেটাকে একবার differentiate করতে হবে। Differentiation-এর যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ-chain rule ইত্যাদি যা যা কায়দা ইতিমধ্যে শিখেছি, প্রতিটা অংক তাই দিয়েই করা যাবে। কোনো কৌশল ছাড়াই। কখনো বা সামান্য একটু কৌশল করলে কাজটা একটু বেশী সহজ হবে। কোনো অংক একটু কঠিন হলে, তার আগে কিছু প্রস্তুতি করার অংক দিয়ে দেব, যাতে গা গরম হয়ে যায়।

- $f'(x) > 0$ হলে $f(x)$-টা increasing, নাকি decreasing?
- $\frac{d}{dx}(e^x(x-2)^2) = ?$
- e^x কখন < 0 হয়?
- $(x-a)(x-b)$ কখন < 0 হয়?

- increasing.
- $e^x x(x-2)$.
- কখনোই হয় না।
- যখন x থাকে a, b-র মাঝখানে।

Exercise 27: If $f(x) = e^x(x-2)^2$ then

(A) f is increasing in $(-\infty, 0)$ and $(2, \infty)$ and decreasing in $(0, 2)$

(B) f is increasing in $(-\infty, 0)$ and decreasing in $(0, \infty)$

(C) f is increasing in $(2, \infty)$ and decreasing in $(-\infty, 0)$

(D) f is increasing in $(0, 2)$ and decreasing in $(-\infty, 0)$ and $(2, \infty)$

(JEE2013.9)

HINT:

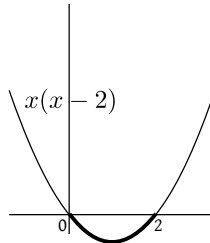



Fig 54

এখানে সরাসরি differentiate করতে বলে নি, বলেছে increasing, decreasing নিয়ে মাথা ঘামাতে। কিন্তু যেহেতু $f(x)$-টা differentiable, তাই increasing, decreasing বার করা মানে এটা দেখা যে $f'(x) > 0$ নাকি $f'(x) < 0$. এখানে $f'(x) = x(x-2)e^x$. এর চিহ্ন নিয়ে গবেষণা করতে হবে। এখানে e^x সর্বদাই > 0, তাই চিহ্নের উপর ওর কোনো প্রভাব নেই। বাকি রইল $x(x-2)$, যেটা একটা দুহাত-উপরে-তোলা parabola, এবং যেটা x-axis-কে $x = 0$ আর $x = 2$-তে ছেদ করে। সুতরাং গ্রাফটা Fig 54-এর মত কিছু একটা। তাই $f'(x) < 0$ হওয়া মানে $x \in (0, 2)$ হওয়া। তাহলে উত্তরটা কী দাঁড়াচ্ছে? ■

- $\frac{d}{dx}\cos x = ?$
- $\sin x$-এর গ্রাফ আঁকো, তারপর তার উপরে $y = x$-এর গ্রাফ আঁকো।
- দুজন দৌড়বীর একই জায়গা থেকে একই দিকে দৌড়তে শুরু করল। প্রথম জনের বেগ বেশী। তাহলে কিছুক্ষণ দৌড় চলার পর কে এগিয়ে থাকবে?
- $f_1(0) = f_2(0)$ আর সব সময়েই $f_1'(x) \leq f_2'(x)$. তাহলে $x > 0$ হলে কোনটা হতে বাধ্য, $f_1(x) \leq f_2(x)$ নাকি $f_1(x) \geq f_2(x)$?

- $f_1(x) \leq f_2(x)$.
- অবশ্যই প্রথমজন।
- Fig 55
- $-\sin x$

Example 42: If $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$, then

(A) $f(x)$ is an increasing function on the real line.

(B) $f(x)$ is a decreasing function on the real line.

(C) $f(x)$ is increasing on the interval $-\infty < x \leq 0$ and decreasing on the interval $0 \leq x < \infty$.

(D) $f(x)$ is decreasing on the interval $-\infty < x \leq 0$ and increasing on the interval $0 \leq x < \infty$.

(BStat/BMath2015.13)

SOLUTION: আমাদের $f(x)$-টা দেখাই যাচ্ছে differentiable. আমাদের মাথা ঘামাতে বলেছে increasing, decreasing ইত্যাদি নিয়ে। সুতরাং প্রথমে অবশ্যই $f'(x)$ বার করতে হবে--

$$f'(x) = x - \sin x.$$

প্রশ্ন হল--এটা কোথায় > 0 আর কোথায়ই বা < 0? মানে, x বড় নাকি $\sin x$ বড়, সেটাই প্রশ্ন। x আর $\sin x$-এর গ্রাফ দুটো কল্পনা করলেই (Fig 55) বুঝবে $f'(x) = 0$ হবে $x = 0$-তে। তার ডানদিকে $f'(x) > 0$ এবং বাঁদিকে

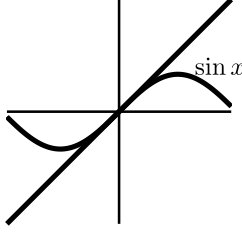



Fig 55

$f'(x) < 0$. সুতরাং উত্তর হল (D). অবশ্য গ্রাফদুটো একটার উপর একটা বসিয়ে কল্পনা করতে যদি অসুবিধা হয়, তবে আরেকভাবেও ভাবতে পারো। এটা বোঝাই যাচ্ছে যে, $f'(0) = 0 - \sin 0 = 0$. সুতরাং মনে করো যেন x আর $\sin x$ হল দুজন দৌড়বীর। দুজনেই $x = 0$ থেকে শুরু করল দৌড়তে। x-এর velocity হল $\frac{dx}{dx} = 1$ আর $\sin x$-এর velocity হল $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$. আমরা জানি যে, $\cos x$ কখনোই 1-এর চেয়ে বড় হতে পারে না, তাই যতই দৌড় চলবে ততই x এগিয়ে যাবে $\sin x$-এর চেয়ে, মানে $x > 0$ হলে $x > \sin x$ হতে বাধ্য। তাই $f'(x) > 0$ হবে। $x < 0$ হলে ঠিক একই যুক্তিতে $f'(x) < 0$ হবে। ■

Example 43: Fill in the blanks: If $f(x) = e^x \cdot g(x) = 2\log_e x$ and $F(x) = f\{g(x)\}$, then $\frac{dF}{dx} = \cdots$.[1] **(HS2014.1d)**

SOLUTION: $F(x)$-এর চেহারাটা দ্যাখো, $f(x)$-এর পেটে $g(x)$ ঢোকানো, অতএব chain rule লাগাতে হবে। তার জন্য $f(x)$ আর $g(x)$ দুটোই জানা থাকা দরকার। অংকে $f(x)$-টা বলে দিয়েছে, কিন্তু $g(x)$ তো সরাসরি বলে দেয় নি, তাই ওটা প্রথমে বার করে নিতে হবে--

$f(x) = 2\log_e x$ আর $e^x \cdot g(x) = 2\log_e x$.

সুতরাং $g(x) = 2e^{-x}\log_e x$. মনে রেখো $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

এবার chain rule লাগিয়ে দিলেই হয়--

$$\therefore \frac{dF}{dx} = f'\big(g(x)\big)g'(x) = \frac{2}{g(x)} \times g'(x) = \cdots = -2 + \frac{2}{x\log_e x}.$$

মাঝের ডট্ ডট্ অংশটুকু তোমার জন্য রেখেছি। আচ্ছা, একটু ধরিয়ে দিচ্ছি, $f'(x) = \frac{2}{x}$ আর

$$g'(x) = 2\left(\frac{d}{dx}(e^{-x}) \times \log_e x + e^{-x} \times \frac{d}{dx}(\log_e x)\right).$$

■

- $\frac{3^x-1}{3^x+1}$-কে $f(g(x))$ আকারে লেখো, এবং $f'(x)$ আর $g'(x)$ বার করো।
- $\log_e(1+x)$-কে differentiate করো।
- $\log_e 1 = ?$ $3^0 = ?$

উত্তর:

- $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$, $g(x) = 3^x$, $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$, $g'(x) = 3^x \log_e 3$.
- $\frac{1}{1+x}$.
- $\log_e 1 = 0$, $3^0 = 1$.

Exercise 28: Let $y = \left(\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)\sin x + \log_e(1+x),\ x > -1$. Then at $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$ equals

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) -2

(JEE2012.12)

HINT:
এই অংকটা দেখে প্রথমে কান্না পেয়ে যেতে পারে। কিন্তু দুটো ব্যাপার মনে রেখো--এক, এটা MCQ, তাই সবকিছু লিখতে হবে না, আর দুই, তোমাকে পুরো derivative-টা কিন্তু বার করতে বলে নি, বলেছে খালি $x = 0$-তে derivative-টার value বার করতে। এখানে যেটা আমাদের বাঁচাবে, সেটা হল "$0\times$যা খুশি সংখ্যা" সর্বদা 0-ই হয়[4]। আর তাকিয়ে দ্যাখো, এই অংকে 0-র একেবারে ছড়াছড়ি। যেমন $x = 0$ বসালে $\sin x$ আর $3^x - 1$, দুজনেই 0 হয়। এদিকে $\left(\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)\sin x$ হল দুটো জিনিসের গুণফল, সুতরাং derivative হবে--

$$\left\{\left(\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)\text{-এর derivative}\right\} \times \sin x \;+\; \left(\frac{3^x-1}{3^x+1}\right) \times \left\{\sin x\text{-এর derivative}\right\}$$

কোনো differentiation না করেই আশা করি বুঝতেই পারছ যে, $x = 0$-তে এটা 0-ই হবে।
সুতরাং পড়ে রইল খালি $\log_e(1+x)$-টা। খালি ওটাকেই differentiate করতে হবে। দ্যাখো তো উত্তর কী হয়! ■

- $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = ?$
- $\sin 0, \cos 0$ আর $\tan 0$ কত?
- $t = \tan\frac{x}{2}$ হলে $\sin x$ আর $\cos x$-কে t দিয়ে লেখো।

- $\frac{1}{1+x^2}$
- $0, 1, 0$.
- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Exercise 29: For $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, the value of

$$\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}\right\}$$

is equal to

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{\sin x}{(1+\sin x)^2}$

(JEE2012.14)

SOLUTION: এই অংকটা দাঁতে দাঁত চেপে differentiate করে গেলে অবশ্যই হয়ে যাবে। কিন্তু একটা MCQ-মার্কা কৌশল করা যায়। লক্ষ করো যে, derivative-টা খালি $x = 0$-তে বার করলেই চলবে, কারণ তা থেকেই তিনটে option বাদ হয়ে যাবে (কারণ $x = 0$-তে (D) হল 0)।

[4] উদীয়মান রামানুজনরা, যারা এখানে দুশ্চিন্তায় পড়ে গেছ $0 \times \infty$-ও 0 কিনা, তাদের অভয় দিয়ে বলি যে, ∞ মোটেই একটা সংখ্যা নয়। আর হ্যাঁ, $0 \times \infty$ হল undefined.

পুরোটা differentiate করলে হয়

$$\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}\right\} = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}}_{\text{প্রথম অংশ}} \times \underbrace{\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}_{\text{দ্বিতীয় অংশ}}.$$

কী করে এটা পেলাম বুঝেছ তো? একটু ধরিয়ে দিই, $\tan^{-1} x$-এর পেটে $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ ঢোকানো ছিল। একটার পেটে আরেকটা ঢোকানো থাকলেই differentiate করতে chain rule-এর ডাক পড়ে। এখন $\tan^{-1} x$-এর derivative হল $\frac{1}{1+x^2}$, তার পেটে $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ ঢুকিয়ে দিলেই ওই "প্রথম অংশ"-টা হয়। এবার $\frac{\cos x}{1+\sin x}$-কে differentiate করে ফেললেই "দ্বিতীয় অংশ"-টা পেয়ে যাবে।
যাই হোক, এটা স্রেফ যন্ত্রচালিতের মত differentiate করে পাওয়া গেল, সাজিয়ে লেখার এতটুকুও চেষ্টা করি নি। এখনও কিন্তু এটাকে সহজ করার দিকে যাবো না, স্রেফ $x=0$ বসিয়ে দেখব। যেহেতু $\sin 0 = 0$ আর $\cos 0 = 1$ সুতরাং চোখে দেখেই বলতে পারছি যে..., না, বলে দেবো না। নিজে বার করো।
এখানে আরেকটা কৌশলও সম্ভব। সেটা হল $t = \tan\frac{x}{2}$ বসানো। তবে যে কায়দাটা বললাম তার চেয়ে সহজ হবে না। ■

প্রস্তুতি:

- $\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = ?$

উত্তর:

- $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Exercise 30: $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ then $y'(1) =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2}$

(JEE2011.73)
HINT:
এখানেও অংকটা আগেরটার মতই। যন্ত্রচালিতের মত differentiate করে গেলেই সহজে হবে।

✎ $y = \tan^{-1} f(x)$, where $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.
So $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$.
Hence $y'(1) = \frac{f'(1)}{1+(f(1))^2} = \ldots$

বাকিটা নিজে করো।
■

প্রস্তুতি:

- $f(x)$ যদি differentiable হয়, তবে $\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)^2 = ?$
- যদি $a \in \mathbb{R}$ হয়, তবে কি $\sqrt{a^2}$ সর্বদাই a হতে বাধ্য?

উত্তর:

- $2f(x)f'(x)$.
- না, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Example 44: If f is a real-valued differentiable function such that $f(x)f'(x) < 0$ for all real x, then

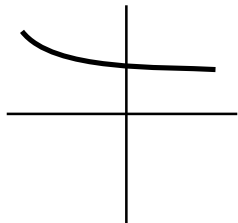
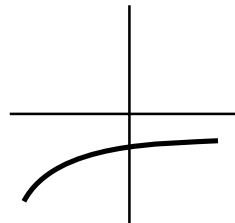



Fig 56 **Fig 57**

(A) $f(x)$ must be an increasing function

(B) $f(x)$ must be a decreasing function

(C) $|f(x)|$ must be an increasing function

(D) $|f(x)|$ must be a decreasing function

(JEE2012.21)
SOLUTION: এই অংকটা একটা কৌশল জানলে ধাঁ করে নামিয়ে দেওয়া যায়। কৌশল না জানলে একটু গ্রাফ দিয়ে ভেবে বার করা যায়। প্রথমে কৌশল ছাড়াই করি। বলে দিয়েছে $f(x)$ হল differentiable, তাই কোনো ভাঙা বা খোঁচ নেই। যেহেতু সর্বদাই $f(x)f'(x) < 0$, তাই $f(x)$ কখনোই 0 হবে না। সুতরাং $f(x)$-এর গ্রাফটা কখনোই x-axis-কে পেরোতে পারবে না। তাই গ্রাফটা হয় সবসময়েই x-axis-এর উপরে থাকবে, নয়তো সব সময়েই নীচে থাকবে। প্রথমে উপরে থাকার কেসটা করি। এখানে $f(x) > 0$. যেহেতু $f(x)f'(x) < 0$ বলা আছে, তার মানে $f'(x) < 0$ হতে বাধ্য। সুতরাং decreasing হবে Fig 56-র মত কিছু একটা। একইরকম যুক্তিতে অন্য কেসটায় (মানে যখন গ্রাফটা x-axis-এর নীচে), তখন হবে increasing, মানে Fig 57-জাতীয় কিছু। এবার option-গুলোর উপরে চোখ বুলিয়ে দ্যাখো, একটাই পড়ে থাকছে, (D). এবার বলি কৌশল ব্যবহার করে কী করে অংকটাকে সহজে ঘায়েল করা যায়। কৌশলটা হল এটা মনে রাখা যে, $\big(f(x)\big)^2$-এর derivative হয় $2f(x)f'(x)$ (এটা chain rule লাগালেই আসে)। সুতরাং ওই যে বলে দিয়েছে $f(x)f'(x) < 0$, তার মানে $\big(f(x)\big)^2$-টা হল decreasing, অতএব $|f(x)|$, যেটা আসলে $\sqrt{\big(f(x)\big)^2}$, সেটাও decreasing হতে বাধ্য। সুতরাং উত্তর হল (D). এখানে মনে রেখো যে, $\sqrt{a^2} = |a|$. যেমন $a = -2$ নিয়েই দ্যাখো, $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |a|$. ■

এবারের অংকটায় আমাদের একটা জিনিস জানা থাকতে হবে। সেটা এই যে, $|x| < 1$ হলে পরে

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + - + \cdots .$$

যদি x-এর জায়গায় $-x$ বসাও (সেক্ষেত্রেও $|-x| = |x| < 1$ হবে), তবে

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots .$$

Example 45: If $y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\infty$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$.[2] **(HS2014.2ci)**

SOLUTION: এই অংকটায় একটা ভুল আছে, এখানে $|x| < 1$ বলা উচিত ছিল।

✎We know that, for $|x| < 1$,

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + - + \cdots . \quad (*)$$

Putting $-x$ in place of x we get

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots . \quad (**)$$

Subtracting $(**)$ from $(*)$ we have

$$\log_e(1+x) - \log_e(1-x) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots).$$

Hence

$$y = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x)).$$

So

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \cdots = \frac{1}{1-x^2},$$

as required.

■

প্রস্তুতি:

- $f(x)$ যদি differentiable হয়, তবে $\frac{d}{dx}e^{f(x)} = ?$

- $e^{f(x)}f'(x)$.

Example 46: Let $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{f_1(x)}$ and generally $f_{n+1}(x) = e^{f_n(x)}$ for all $n \geq 1$. For any fixed n, the value of $\frac{d}{dx}f_n(x)$ is

(A) $f_n(x)$ (B) $f_n(x)f_{n-1}(x)$ (C) $f_n(x)f_{n-1}(x)\cdots f_1(x)$ (D) $f_{n+1}(x)f_n(x)\cdots f_1(x)e^x$.

(BStat/BMath2015.11)

SOLUTION: এরকম অংক কিছু উদাহরণ নিয়ে দেখলেই হয়ে যায়। ধরো $n = 1$ নিলাম। তবে

$$\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{d}{dx}f_1(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

পরপর option-গুলো পরীক্ষা করে দ্যাখো $n = 1$-এর জন্য। (A) হল $f_1(x)$, মিলছে। (B) হল $f_1(x)f_0(x)$, ওরে বাবা $f_0(x)$ বলে তো কিছু নেই-ই এই অংকে! (C) হল $f_1(x)$ থেকে $f_n(x)$ অব্দি সবার গুণফল, মানে $n = 1$ হলে খালি $f_1(x)$, সুতরাং এটাও মিলছে। (D) হল $f_2(x) = e^{f_1(x)} = e^{e^x}$, মিলছে না।
এবার তাহলে লড়াই (A) আর (C)-এর মধ্যে। পরীক্ষা করার জন্য $n = 2$ নেওয়া যাক।

$$\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{d}{dx}f_2(x) = \frac{d}{dx}e^{f_1(x)} = e^{f_1(x)}f_1'(x) = f_2(x)f_1(x).$$

দেখাই যাচ্ছে যে (A) হেরে গেল। সুতরাং (C)-ই উত্তর। ■

প্রস্তুতি:

- এমন একটা $g(x)$ দাও, যাতে $\frac{4+\sqrt{2x}}{x} = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ হয়।
- $4x^2 + \sqrt{2}x$-এর গ্রাফ আঁকো।

- Fig 58।
- $g(x) = 4x^2 + \sqrt{2}x.$

Example 47: Consider the function $f(x) = \left\{\log_e\left(\frac{4+\sqrt{2x}}{x}\right)\right\}^2$ for $x > 0$. Then

(A) f decreases up to some point and increases after that

(B) f increases up to some point and decreases after that

(C) f increases initially, then decreases and then again increases

(D) f decreases initially, then increases and then again decreases.

(BStat/BMathMCQ.23)
SOLUTION:এই অংকটা দাঁতে দাঁত চেপে differentiate করে করতে গেলে দাঁতেরই ক্ষতি হবে খালি, অংকের গায় সহজে দাগ পড়বে না। তাই আগে function-টাকে একটু সহজ জিনিসে ভেঙে নেওয়া যাক। লক্ষ করো যে, এটা তিনটে function-এর composition, সবার বাইরে x^2 তার ভিতরে $\log_e x$ এবং সবার ভিতরে $\frac{4+\sqrt{2x}}{x}$. অংকটার বিশ্রী চেহারাটা এই ভিতরের function-টার জন্যই। দেখি এটাকে আরও ভাঙা যায় কিনা--

$$\frac{4+\sqrt{2x}}{x} = \frac{4}{x} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.$$

সুতরাং যদি $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ নিই, তবে এটা হয়ে যাবে $4t^2 + \sqrt{2}t$, যেটা যথেষ্ট ভদ্র দেখতে। মানে আমাদের গোড়ার $f(x)$-টাকে লেখা যাচ্ছে এইভাবে--

$$f(x) = g_1(g_2(g_3(g_4(x)))),$$

যেখানে $g_1(x) = x^2,\ g_2(x) = \log_e x,\ g_3(x) = 4x^2 + \sqrt{2}x$ এবং $g_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Chain rule লাগালেই পাবে

$$f'(x) = g_1'(g_2(g_3(g_4(x)))) \times g_2'(g_3(g_4(x))) \times g_3'(g_4(x)) \times g_4'(x).$$

এখানে $g_1(x), ...g_4(x)$-দেরকে differentiate করা খুবই সহজ। সেটা করলেই দেখবে--

$$f'(x) = \underbrace{2\log_e(g_3(g_4(x)))} \times \underbrace{\frac{1}{g_3(g_4(x))}} \times \underbrace{(8g_4(x) + \sqrt{2})} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)}.$$

না, এটা আমাদের পুরোটা বার করতে হবে না, খালি দেখতে হবে এটা কখন > 0 আর কখন < 0 হয়। এরজন্য আমরা চারটে অংশকে আলাদা করে দেখব, কে কখন > 0 আর < 0 হয়--

- এখানে $x > 0$ বলা আছে। তাই সবশেষের term-টা সর্বদাই < 0.
- আবার যেহেতু $g_4(x) > 0$, তাই তৃতীয় term-টা > 0 হবেই।

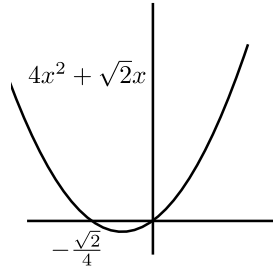



Fig 58

- একইভাবে $g_4(x) > 0$ হওয়ায় $g_3(g_4(x)) > 0$ হবে। বোঝার জন্য Fig 58 দেখে নাও। তাই দ্বিতীয় term-টাও > 0 হচ্ছে।

- সমস্যা হবে প্রথম term-টার বেলায়। এখানে $\log_e(g_3(g_4(x)))$ নিয়ে কাজ করতে হবে। মনে রেখো যে, $0 < x < 1$ হলে $\log_e x < 0$ হয়, আর $x > 1$ হলে $\log_e x > 0$ হয়। এবার $x > 0$-র জন্য $g_3(x)$-এর গ্রাফ (Fig 58) দেখলেই বুঝবে যে, সেটা প্রথমে খানিকক্ষণ < 1 থাকে, এবং তারপরে 1-কে ছাড়িয়ে যায়। সুতরাং $\log_e(g_3(g_4(x)))$ শুরুতে খানিকক্ষণ < 0 থাকার পর এক সময়ে 0-কে ছাড়িয়ে যাবে। এইটা গ্রাফ দিয়ে না ভাবলে বোঝা কঠিন। সুতরাং $g_1'(g_2(g_3(g_4(x))))$-ও প্রথমে খানিকক্ষণ < 0 হবে, তার পর 0 পার করে > 0 হবে।

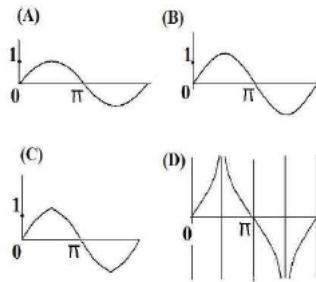
অতএব সব মিলিয়ে উত্তর হল $f'(x)$ প্রথমে খানিকক্ষণ > 0 তারপর 0 পার করে < 0 হবে। তাই উত্তর হল (B). ■

প্রস্তুতি:

- যদি $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনেই differentiable হয়, তবে কি $f(g(x))$-এর গ্রাফে কোনো খোঁচ থাকতে পারে?
- $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-এর জন্য $\tan x$-এর গ্রাফ আঁকো। এর মধ্যে x-এর কোন value-তে $\tan x = 1$?
- ছোটো থেকে বড় সাজাও, $1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.

উত্তর:

- না।
- Fig 59
- $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$.

Example 48: Which of the following is the closest to the graph of $\tan(\sin x),\ x > 0$?

(Bstat/Bmath2012short.14)

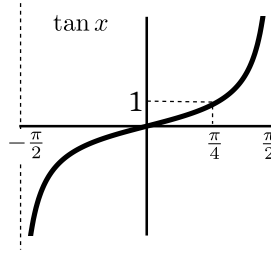



Fig 59

SOLUTION: এখানে $\tan x$ আর $\sin x$ দুজনেই differentiable, তাই $\tan(\sin x)$-ও differentiable হতে বাধ্য। সুতরাং তার গ্রাফে কোনো খোঁচ থাকতে পারে না। অতএব (C)-টা বাদ গেল। লক্ষ করো, $\sin x$ সর্বদা $[-1, 1]$-এর মধ্যে ঘোরাঘুরি করে, এবং $1 < \frac{\pi}{2}$. তাই $\tan x$-এর গ্রাফটা দেখলেই বুঝবে যে, $\tan(\sin x)$ একেবারে ∞ অব্ধি উঠে যেতে পারে না, সুতরাং (D)-কেও বিদায় নিতে হল। সুতরাং লড়াই চলছে (A) আর (B)-এর মধ্যে। এ দুটো গ্রাফ প্রায় একইরকম, খালি (A)-র বেলায় গ্রাফটা $[-1, 1]$-এর মধ্যে আছে, কিন্তু (B)-এর বেলায় $[-1, 1]$-এর বাইরেও খানিকটা গেছে। আমরা জানি $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ আর $\frac{\pi}{4} < 1$. সুতরাং $\tan x$-এর গ্রাফটা (Fig 59) আরেকবার দেখলেই বুঝবে যে, $[-1, 1]$-এর কিছুটা বাইরে যাচ্ছি। তাই উত্তর হবে (B). ■

DAY 13
Function-এর differentiation (হাতেকলমে 2)

এবার যে অংকগুলো করব, সেখানে একটা করে function দেওয়া থাকবে, এবং তাদেরকে একাধিকবার differentiate করতে হবে।

Exercise 31: If $y = \frac{A}{x} + Bx^2$, then $x^2\frac{d^2y}{dx^2} =$

(A) $2y$ (B) y^2 (C) y^3 (D) y^4

(JEE2011.59)
HINT: এটা স্রেফ কষে যাওয়ার অংক। $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{x^2} + 2Bx$.
$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2A}{x^3} + 2B$.
এবার একে x^2 দিয়ে গুণ করে দ্যাখো কী উত্তর আসছে। ■

Exercise 32: $f(x) = \tan^{-1}(x)$. Then $f'(x) + f''(x) = 0$ when x is equal to

(A) 0 (B) +1 (C) i (D) $-i$

(JEE2011.72)
HINT:
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ আর $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.
বলা আছে $f'(x) + f''(x) = 0$. সুতরাং $\frac{1}{1+x^2} + \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0$.
মানে, $1 + x^2 - 2x = 0$.
তাহলে উত্তরটা কী হচ্ছে? ■

Example 49: If $pv^a = c$ (a and c are constants), then show that

$$v^2\frac{d^2p}{dv^2} = a(a+1)p.$$

[4] **(HS2016.2cior)**

SOLUTION: এখানে $\frac{d^2p}{dv^2}$ রয়েছে, তাই গোড়াতেই p-কে v-এর function হিসেবে লিখে নিতে পারলে সুবিধা হবে।

✎Here $p = cv^{-a}$.

$\therefore \frac{dp}{dv} = -acv^{-a-1}$.

$\therefore \frac{d^2p}{dv^2} = a(a+1)cv^{-a-2}$.

$\therefore v^2\frac{d^2p}{dv^2} = a(a+1)cv^{-a} = a(a+1)p$, as required.

■

Exercise 33: Which of the following will be correct if $y = p\sin\alpha x + q\cos\alpha x$?

(A) $y_2 + \alpha^2 y = 0$ (B) $y_2 - \alpha y = 0$ (C) $y_2 + \alpha y = 0$ (D) $y_2 - \alpha^2 y = 0$

[y_1, y_2 have their usual significance; p, q and α are constants.] **(HS2014.1e)**

HINT: এখানে y_1 বলতে $\frac{dy}{dx}$ আর y_2 বলতে $\frac{d^2y}{dx^2}$ বুঝিয়েছে। অবশ্য option-গুলোর মধ্যে কোথাও y_1-এর কোনো উল্লেখ নেই।

অংকটা সোজাই, প্রথমে একবার differentiate করে y_1 বার করো, তারপর আরেকবার differentiate করে y_2. শুরুটা ধরিয়ে দিচ্ছি, $y_1 = p\alpha\cos\alpha x - q\alpha\sin\alpha x$. এবার নিজে নিজে করো।

■

Example 50: If $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, show that

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

where a and b are constants.[2] **(HS2014.2cii)**

SOLUTION: এটা একেবারে গায়ের জোরে করে গেলেই হয়ে যাবে, মানে প্রথমে $\frac{dy}{dx}$ এবং তারপর $\frac{d^2y}{dx^2}$ বার করে। কিন্তু ওভাবে একটু জটিল জিনিসপত্র আসবে। একটা কৌশল করলে খানিকটা খাটনি বাঁচবে। প্রথমে একবার differentiate করতেই হবে--

✎By chain rule,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -a\sin(\log x)\frac{d}{dx}\log x + b\cos(\log x)\frac{d}{dx}\log x \\ &= \frac{-a\sin(\log x) + b\cos(\log x)}{x}.\end{aligned}$$

এবার এটাকে আরেকবার differentiate করলেই হয়, কিন্তু তার জন্য ভাগের সূত্র লাগবে, আর differentiation-এর ভাগের সূত্রটা মোটেই আরামদায়ক নয়, উপরতলা নীচের তলা মিলে কেমন সব ঘেঁটে ঘন্ট পাকিয়ে যায় যেন! তাই ডানদিকের নীচের x-টাকে বাঁদিকের উপরে নিয়ে এলে সুবিধা হবে--

✎ $\therefore x\frac{dy}{dx} = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$.

এইবার ফের দুইপাশকে differentiate করব। মনে রেখো $x\frac{dy}{dx}$ হল দুটো function-এর গুণফল, তাই ওর derivative হবে $\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}$. সুতরাং--

✎Differentiating both sides,

$$\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(\log x)\frac{d}{dx}\log x - b\sin(\log x)\frac{d}{dx}\log x = -\frac{a\cos(\log x)+b\sin(\log x)}{x} = -\frac{y}{x}$$

Multiplying both sides by x, we get

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

as required.

■

প্রস্তুতি:

- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ?$
- $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^5$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

উত্তর:

- $\frac{2}{(1-x)^2}$.
- $\frac{10(1+x)^4}{(1-x)^6}$.

Example 51: If $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$, prove that $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = 2(n+x)\frac{dy}{dx}$.[3] **(HS2014.4cii)**

SOLUTION: এমনি করে গেলেই হয়, কিন্তু একটু কৌশল করলে খাটনি বাঁচানো যায়।

✎By chain rule

$$\frac{dy}{dx} = n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n-1} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \qquad (*)$$

এইবার $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$-কে differentiate করতে হবে--

✎Now

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1\times(1-x)-(-1)\times(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

So, from (*),

$$\frac{dy}{dx} = n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n-1} \times \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2n(1+x)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}} = \frac{2ny}{1-x^2}.$$

এই শেষ ধাপটা বুঝলে তো? উপরে একটা $(1+x)$ কম ছিল, আর নীচে একটা $(1-x)$ বেশী ছিল। ওদের মিলিয়েই $(1-x^2)$-টা তৈরী হয়েছে।

✎$\therefore (1-x^2)\frac{dy}{dx} = 2ny.$

Differentiating both sides,

$$-2x\frac{dy}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = 2n\frac{dy}{dx},$$

or, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = 2(n+x)\frac{dy}{dx}$, as required.

■

এইবারের অংকটায় বেশ কিছুটা প্যাঁচ আছে।

Example 52: Consider the function $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where a, b, c and d are real numbers with $a > 0$. If f is strictly increasing, then the function $g(x) = f'(x) - f''(x) + f'''(x)$ is

(A) zero for some $x \in \mathbb{R}$

(B) positive for all $x \in \mathbb{R}$

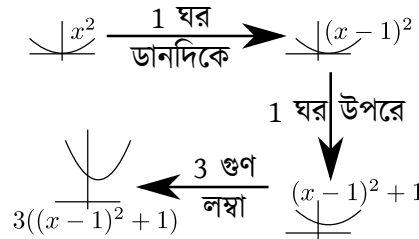
(C) negative for all $x \in \mathbb{R}$

(D) strictly increasing.

(BStat/BMathMCQ.13)

SOLUTION: এই অংকটা আমরা দুভাবে করব। প্রথমে একটা MCQ-ঠকানো কায়দা বলি, যাতে অংকটা ফাঁকি দিয়ে চট করে করা যাবে। লক্ষ করো যে, এখানে এমন কোনো option নেই, যেখানে "হতেও পারে"-গোছের কোনো শর্ত বা “None of the above” আছে। এরকম ক্ষেত্রে সাধারণতঃ একটা সহজ কিছু উদাহরণ নিয়ে ভাবলে ভালো হয়। তাহলে এমন একটা সহজ কোনো polynomial ভাবতে হবে, যেটা $ax^3 + bx^2 + cx + d$ আকারের এবং strictly increasing. প্রথমেই যেটা মাথায় আসে, সেটা হল x^3 (মানে $a = 1$ আর $b = c = d = 0$)। সুতরাং $f(x) = x^3$ নিয়ে অংকটা করি। তাহলে $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ আর $f'''(x) = 6$. সুতরাং $g(x) = 3x^2 - 6x + 6$. এটাকে একটু সাজিয়ে লিখলে হয় $3\big((x-1)^2 + 1\big)$, যার গ্রাফটা (Fig 60) মনে মনে ভেবে নিলেই বুঝে যাবে যে, (A), (C) এবং (D) হচ্ছে না, এবং (B) হচ্ছে[5]। সুতরাং (B)-ই উত্তর হতে বাধ্য। বুঝতে পারছ আশা করি যে, এখানে “None of the above” বলে একটা option থাকলে এই "একটা-উদাহরণ-দেখেই-মেরে-দেওয়া"-র ফাঁকিটা চলত না।

[5]চাইলে গ্রাফ না ব্যবহার করে discriminant বার করেও করতে পারো, যদিও গ্রাফ দিয়ে ভাবলে ভুল হবার সম্ভাবনা কম।

Fig 60

বিকল্প পদ্ধতি

এবার যে কায়দাটা বলব তাতে পরিশ্রম অনেকটাই বেশী, কিন্তু এখানে কোনো MCQ-ঠকানো ফাঁকি নেই। প্রথমে পর পর differentiate করে যাও--

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c, \\ f''(x) &= 6ax + 2b, \\ f'''(x) &= 6a. \end{aligned}$$

তাহলে $g(x) = f'(x) - f''(x) + f'''(x)$ দাঁড়াচ্ছে এইরকম--

$$g(x) = 3ax^2 + (2b - 6a)x + (c - 2b + 6a)$$

দেখাই যাচ্ছে যে, $g(x)$ একটা quadratic, যার গ্রাফটা একটা দুহাত-তোলা parabola, যেহেতু $a > 0$ বলা আছে। সুতরাং (C) আর (D) এখানেই বাদ হয়ে গেল। লড়াই চলছে (A) আর (B)-এর মধ্যে। এই লড়াইয়ের নিষ্পত্তি হয়ে যাবে $g(x)$-এর discriminant-টা বার করলেই--

$$(2b - 6a)^2 - 12a(c - 2b + 6a) = \cdots = 4b^2 - 36a^2 - 12ac.$$

যদি এটা < 0 হয়, তার মানে গ্রাফটা x-axis-এ লাগছেই না, সেক্ষেত্রে উত্তর হবে (B), নইলে উত্তর হবে (A).
Discriminant-টার চিহ্ন নির্ধারণ করার জন্য আমাদের সাহায্য করবে এই তথ্যটা-- বলা আছে যে, $f(x)$ হল strictly increasing. মানে $f'(x) > 0$. সুতরাং $f'(x)$ (যেটা একটা quadratic), তার discriminant-টা অবশ্যই < 0. (কেন বোঝা যাচ্ছে তো? নইলে ভালো করে ভেবে দ্যাখো!) অতএব $4b^2 - 12ac < 0$, অর্থাৎ $b^2 - 3ac < 0$.
দেখি $g(x)$-এর discriminant-টাকে কোনোভাবে $b^2 - 3ac$ দিয়ে লেখা যায় কিনা। হ্যাঁ যায়, কারণ $4b^2 - 36a^2 - 12ac = -36a^2 + 4(b^2 - 3ac)$. যেহেতু $b^2 - 3ac < 0$ সুতরাং discriminant-টাও < 0 হতে বাধ্য। অতএব উত্তর হচ্ছে (B). ■

DAY 14
Implicit differentiation

আমরা শিখেছি যে, কোনো curve-এর উপর কোনো বিন্দুতে যে tangent আঁকা যায়, তার slope-টাই হল ওই বিন্দুতে ওই curve-এর slope. এটাই হল curve-এর slope-এর সংজ্ঞা। এই সংজ্ঞা প্রয়োগের পথে কী কী অন্তরায় আছে, সে কথাও বলেছি--

- যদি ওই বিন্দুতে ভাঙা বা খোঁচ থাকে, তবে tangent-ই আঁকা যাবে না।
- ভাঙা বা খোঁচ না থাকলে tangent আঁকা যাবেই, কিন্তু tangent-টা যদি vertical হয়ে যায়, তবে তার slope হয়ে যাবে undefined.

এই কটা সমস্যা না হলে curve-এর slope-এর সংজ্ঞাটা কাজ করতে বাধ্য। প্রশ্ন হল slope-টা বার করা যাবে কী করে! গত কয়েকদিন ধরে তার একটা কায়দা আমরা শিখেছি--differentiation. এই কায়দাটা কাজ করে যখন curve-টা কোনো function-এর গ্রাফ হবে (মানে কোনো vertical লাইন curve-টার গায় একাধিক জায়গায় লাগবে না)। কিন্তু সব curve তো আর কোনো function-এর গ্রাফ হয় না, যেমন নীচের উদাহরণে।

Example 53: Fig 61-এর দিকে তাকাও। এখানে যে curve-টা এঁকেছি, সেটা কোনো function-এর গ্রাফ হতে পারে না, কারণ একই vertical লাইন একে একাধিক জায়গায় ছেদ করেছে। কিন্তু তাও আমরা এর বিভিন্ন জায়গায় tangent আঁকতেই পারি। ■

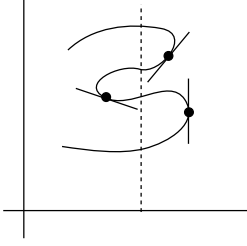
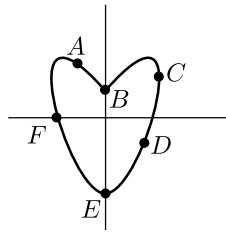
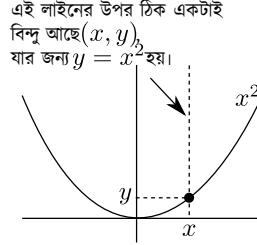
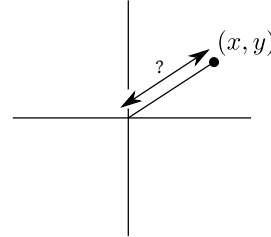



Fig 61 **Fig 62** **Fig 63** **Fig 64**

এবার আমরা এইরকম curve-দের slope বার করা শিখব। এখানেও differentiation কাজে দেবে, কিন্তু একটু কৌশল করে। সেই কৌশলটা শেখার আগে নীচের অংকটা করে চোখের আন্দাজে tangent আঁকাটা ঝালিয়ে নাও।

Exercise 34: Fig 62-এ একটা curve এঁকেছি। এর উপর কয়েকটা point দেখানো আছে। এর মধ্যে ঠিক একটা point-এ একটা খোঁচ আছে। কোনটায়? বাকি point-গুলোতে চোখের আন্দাজে tangent আঁকো। কোন্ জায়গায় tangent-টা একেবারে vertical হচ্ছে? বাকি point-গুলোর বেলায় বলো tangent-গুলোর slope-টা কীরকম, positive নাকি negative নাকি 0? ■

এই অংকটা পুরোই চোখের আন্দাজে করা হল। এবার আমরা ঠিক এই কাজটাই করব, কিন্তু চোখের আন্দাজ ব্যবহার না করে। এটা দুইভাবে করা যায়--

- এক, **implicit differentiation** করে,
- দুই, **parametric differentiation** করে।

এদের মধ্যে প্রধান পার্থক্য হল curve-টাকে কীভাবে অংকের ভাষায় দেওয়া আছে, সেখানে। আজকে আমরা শিখব implicit differentiation. আর কালকে শিখব parametric differentiation.
একটা সহজ উদাহরণ নিয়ে শুরু করি।

Example 54: ধরো আমরা $f(x) = x^2$-এর গ্রাফ আঁকতে চাই। আমরা জানি যে, এর চেহারা হবে Fig 63-এর মত।

যদি এই গ্রাফের গায় কোনো point নিই (x, y), তবে বুঝতেই পারছ যে, $y = x^2$ হবে। আবার যদি এমন দুটো সংখ্যা x আর y দিই, যাতে $y = x^2$ হয়, তবে অতি অবশ্যই (x, y) বিন্দুটা গ্রাফের উপর থাকতে বাধ্য। সুতরাং আমরা বলতে পারি যে, গ্রাফটা হল সেই সব যাবতীয় বিন্দু (x, y)-এর set যেখানে $y = x^2$, মানে এই set-টা--

$$\{(x, y) \ : \ y = x^2\}.$$

■

এই ব্যাপারটা ঠাণ্ডা মাথায় ভালো করে বুঝে নাও। এইভাবে set-এর ভাষায় লেখার সুবিধা হল এই যে, এই কায়দায় আমরা যে কোনো curve-কেই প্রকাশ করতে পারব, সেটা কোনো function-এর গ্রাফ হোক বা না হোক। সেটাই বলব এবার। কিন্তু তার আগে চট্ করে দেখে নিই, তোমার Pythgoras' theorem-টা সড়গড় আছে কিনা।

Example 55: গ্রাফ কাগজের উপর Fig 64-এর মত একটা point আছে (x, y). বলো তো $(0, 0)$ থেকে এর দূরত্ব কত!

SOLUTION: Fig 65-এর দিকে তাকালেই বুঝবে যে, উত্তর হল $\sqrt{x^2 + y^2}$. ছবিতে $x, y > 0$ দেখিয়েছি। কিন্তু যেহেতু square নেওয়া হয়েছে, তাই ওরা negative হলেও একই ফর্মুলা কাজ করত। ■

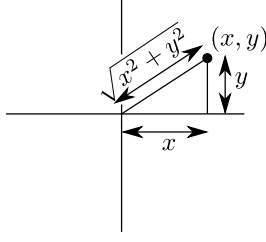
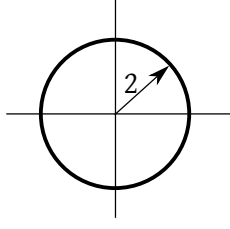
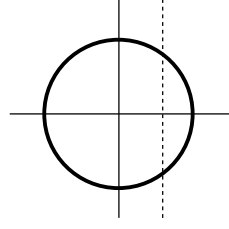
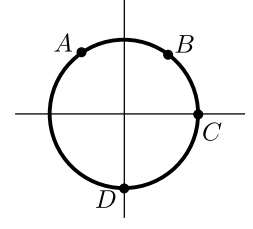



Fig 65 **Fig 66** **Fig 67** **Fig 68**

Example 56: এবার Fig 66-এর দিকে তাকাও। দেখতেই পাচ্ছ যে, এটা একটা circle, যার centre (কেন্দ্র) হল $(0,0)$-তে, এবং radius (ব্যাসার্ধ) হল 2. এটা কি কোনো function-এর গ্রাফ হতে পারে? একে set-এর আকারে লিখতে পারো?

SOLUTION: না, এটা কোনো function-এর গ্রাফ নয়, কারণ এমন vertical লাইন আঁকা সম্ভব, যেটা একে একাধিক জায়গায় ছেদ করে (Fig 67)। কোনো (x,y) এই curve-এর উপরে থাকা মানে--

(x,y) থেকে $(0,0)$-র দূরত্ব হল 2, অর্থাৎ $\sqrt{x^2+y^2}=2$.

তাই set-এর ভাষায় লেখা যায়--

$$\{(x,y)\ :\ \sqrt{x^2+y^2}=2\},$$

বা, যদি square root-টা দেখতে বিচ্ছিরি লাগে, তবে square নিয়ে লিখতে পারো--

$$\{(x,y)\ :\ x^2+y^2=4\}.$$

■

Exercise 35: আবার সেই circle-টা নিয়েই কাজ করব (Fig 68)। মনে মনে এই circle-টার গায় আঙুল বুলিয়ে বলো তো কোথাও কোনো খোঁচ আছে কিনা। যে কটা বিন্দু দেখিয়েছি, সেখানে চোখের আন্দাজে tangent আঁকো। কোথাও কি tangent-টা একেবারে vertical হচ্ছে? যে কটা বিন্দু দেখিয়েছি, তার বাইরে আর কোথাও কি tangent-টা vertical হতে পারে?

■

এবার অংক কষে এইরকম curve-এর slope বার করা শিখব।

Example 57: Fig 69-এ এমন একটা point নিয়েছি, যেখানে tangent-টা মোটেই vertical নয়। আমাদের কাজ

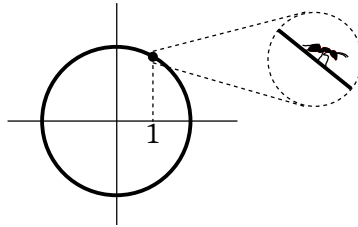



Fig 69 **Fig 70**

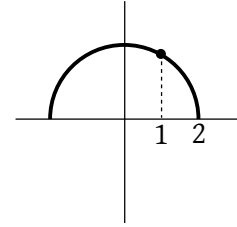
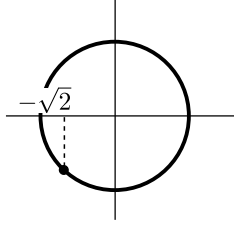
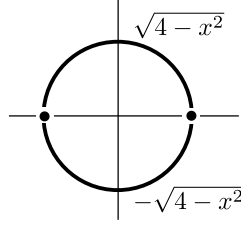
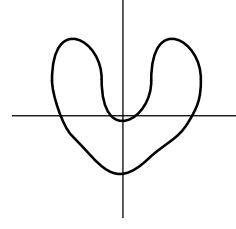



Fig 71 **Fig 72** **Fig 73**

হবে এই tangent-টাকে চোখের আন্দাজে না এঁকে পুরো অংক কষে তার slope বার করা। এর জন্য আমরা নিজেদের মনে করব যেন একটা পিঁপড়ে, যেটা ওই circle-এর উপর ওই বিন্দুতে আছে। পিঁপড়েটা বেশী দূর দেখতে পায় না। তাই তার চোখে যেটুকু ধরা পড়ছে, সেটুকুর মধ্যে circle-টাকে একটা সরলরেখা বলেই মনে হচ্ছে। এই সরলরেখাটাই হল ওই বিন্দুতে tangent-টা। এবার দ্যাখো, পিঁপড়েটা রয়েছে circle-টার উপরের অর্ধেকে, মানে যে অংশটা x-axis-এর উপরদিকে আছে। সে জানতেও পারছে না যে, circle-টার বাকি অর্ধেকটা রয়েছে x-axis-এর নীচে। যদি আমরা চুপিচুপি ওই নীচের অর্ধেকটা কেটে বাদ দিয়ে দিই, তবে পিঁপড়েটা টেরই পাবে না। কিন্তু এর ফলে আমাদের কাজ অনেক সহজ হয়ে যাবে। কী করে বলো তো!

SOLUTION: সহজ হয়ে যাবে, কারণ এখন ছবিটা হবে Fig 70-র মত, যার গায় কোনো vertical লাইন একাধিক বার লাগতে পারে না। সুতরাং এটা সত্যিই একটা function-এর গ্রাফ। বস্তুতঃ এই function-টা লিখে ফেলা মোটেই কঠিন নয়--যেহেতু $y^2 = 4 - x^2$, তাই $y = \sqrt{4-x^2}$. এখানে আমরা positive square root নিয়েছি, কারণ x-axis-এর উপরের অর্ধেক নিয়ে কাজ হচ্ছে। তার মানে function-টা হল $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. এবার আমরা কোনো function-এর গ্রাফের slope যেভাবে বার করতাম, সেভাবেই এগোব, মানে $f(x)$-কে differentiate করব--

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

এখানে $x = 1$ বসালেই উত্তর পেয়ে যাবে, $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Exercise 36: একই কায়দায় Fig 71-এ দেখানো বিন্দুতে tangent-এর slope-টা বার করো।
HINT: এখানে পিঁপড়েটা x-axis-এর নীচে আছে, সুতরাং উপরের অর্ধেকটা ভুলে যেতে পারো। ■

এই যে কায়দাটা শিখলাম, সেখানে শুরু করেছিলাম এমন একটা curve নিয়ে যেটা কোনো function-এর গ্রাফ ছিল না। কিন্তু যখন ওর কোনো একটা বিশেষ বিন্দুর কাছাকাছি জায়গাটা দেখছি, তখন সেখানে curve-টার এমন একটা অংশ নিয়ে নেওয়া গেল, যেটা দিব্যি একটা function-এর গ্রাফ।

Circle-এর বেলায় আমরা এরকম দুটো অংশ পেয়েছিলাম (Fig 72)। ওপরেরটা $\sqrt{4-x^2}$-এর গ্রাফ, আর নীচেরটা $-\sqrt{4-x^2}$-এর। এই দুই অংশের বাইরে circle-টার খালি দুটো point রয়ে গেল। কিন্তু সে দুটো point নিয়ে আমাদের চিন্তা নেই, কারণ সেখানে tangent হবে vertical.

> হনুমান: আজ্ঞে, ওপরেরটা গন্ধমাদন পাহাড়...
> আর ঐ নীচেরটা যমরাজা।
>
> --লক্ষ্মণের শক্তিশেল (সুকুমার রায়)

এবার একটা জটিলতর উদাহরণ দেখি, যেখানেও ঠিক একইরকম ব্যাপার হবে।

Example 58: Fig 73 দ্যাখো। এখানে যে curve-টার ছবি দিয়েছি, সেটা কোনো একটা function-এর গ্রাফ হতে পারে না। কিন্তু এটাকে বিভিন্ন function-এর গ্রাফ জুড়ে জুড়ে কীভাবে বানানো যায়? এদেরকে ব্যবহার করে কী করে তুমি গ্রাফটার কোনো বিন্দুতে slope বার করবে?

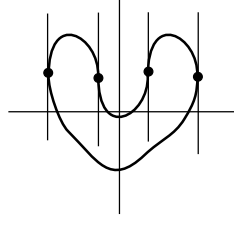



Fig 74

SOLUTION: প্রথমে বার করি কোথায় কোথায় tangent-টা vertical হবে (Fig 74)। সেই point কটা বাদ দিলে পুরো curve-টা চারটে টুকরো হয়ে যাবে, যারা প্রত্যেকেই এককেটা function-এর গ্রাফ। এদেরকে মোটা করে দেখিয়েছি Fig 75, Fig 76, Fig 77 আর Fig 78-এ। সুতরাং ওই কয়টা point বাদে যদি অন্য যে কোনো point দিই curve-টার উপরে, তবে তুমি দেখে নেবে সেই point-টা কোন টুকরোটাতে পড়ে। সেইখানকার function-টাকে differentiate করে দিলেই উত্তর পেয়ে যাবে। ■

ব্যাপারটা circle-এর উদাহরণের মত হলেও একটা গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। সেখানে দুটো টুকরোর জন্যই function-গুলোর ফর্মুলা দিব্যি লিখে ফেলা যাচ্ছিল। কিন্তু এখানে ফর্মুলা পাওয়া সহজ নয়। প্রত্যেকটা টুকরোই কোনো না কোনো function-এর গ্রাফ, সেটা বোঝাই যাচ্ছে (যেহেতু কোনো vertical লাইন একই টুকরোর গায় একাধিকবার লাগছে না)। কিন্তু সেই function-এর ফর্মুলাটা জানার কোনো সহজ পথ চোখে পড়ছে না। ঠিক যেন খুনের তদন্ত করার মত--খুন যখন হয়েছে, তখন খুনী অন্ততঃ একটা আছেই, কিন্তু তার পরিচয়টা জানার কোনো সহজ পথ নেই। এরকম অবস্থায় গোয়েন্দাকে যেমন খুনীর পরিচয় না জেনেই তদন্ত চালাতে হয়, আমাদেরও তাই করতে হবে। যেভাবে সেটা করা হয়, তাকেই বলে **implicit differentiation.** আবার সেই circle-এর উদাহরণ দিয়ে ব্যাপারটা বুঝে নিই।

Example 59: ফের আমরা $x^2 + y^2 = 4$ নিয়ে কাজ করব। আমাদের উদ্দেশ্য হল $(1, \sqrt{3})$-তে ওর tangent-এর slope-টা বার করা। আগের বার আমরা circle-টাকে দুভাগে ভেঙে নিয়ে উপরের টুকরোটা খালি নিয়েছিলাম, যার জন্য function-টা ছিল $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. এবার এই ফর্মুলাটা ব্যবহার না করে অংকটা করতে হবে।

SOLUTION: আমরা কাজ করছি $(1, \sqrt{3})$ বিন্দুতে। আমরা খালি ধরে নেব যে, ওখানে tangent-টা vertical হয়ে যাবে না। সুতরাং ওই বিন্দুটা কোনো একটা টুকরোতে পড়বে, ধরি তার function-টা হল $y = f(x)$. আমরা $f(x)$-এর ফর্মুলা নিয়ে মাথাই ঘামাব না। কিন্তু এটুকু অবশ্যই জানি যে, পুরো curve-টাতেই $x^2 + y^2 = 4$, তাই এই টুকরোটাতে $x^2 + f(x)^2 = 4$ হতে বাধ্য। এবার দুই পাশকে differentiate করে দিলে পাবে $2x + 2f(x)f'(x) = 0$. এবার এর মধ্যে $x = 1$ বসালেই পেয়ে যাবে $2 + 2f(1)f'(1) = 0$, অর্থাৎ $f'(1) = -\frac{1}{f(1)}$. আমরা জানি যে, $f(1) = \sqrt{3}$, তাই $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, ঠিক যেটা আমরা আগে $f(x)$-এর ফর্মুলা ব্যবহার করে পেয়েছিলাম। ■

এখানে $f(x)$-এর ফর্মুলা ব্যবহার না করেই (কেবল মাত্র $f(x)$-এর অস্তিত্বটুকু জেনেই) কাজ হয়ে গেল, তাই এখানে $f(x)$-কে

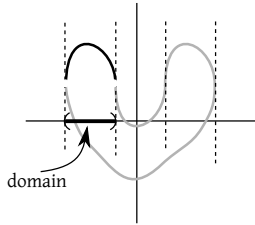
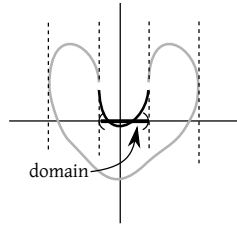
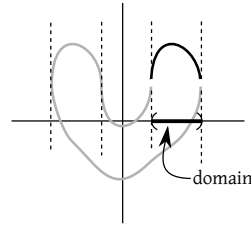
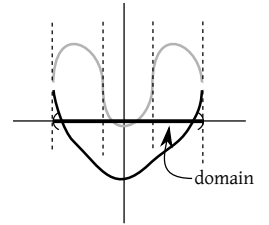



Fig 75 **Fig 76** **Fig 77** **Fig 78**

বলব একটা **implicit function.** সেখান থেকেই implicit differentiation কথাটার উৎপত্তি। কায়দাটা গুছিয়ে লিখে নিই--

IMPLICIT DIFFERENTIATION

> ধরো একটা curve দেওয়া আছে implicit-ভাবে, মানে $f(x,y) = g(x,y)$ আকারে, যেখানে $f(x,y)$ আর $g(x,y)$-এর মধ্যে হয়তো x আর y জড়িয়েমড়িয়ে একাকার হয়ে আছে। এরকম অবস্থায় দুইপাশকেই x-এর function হিসেবে কল্পনা করে differentiate করে দাও, এবং তারপর $\frac{dy}{dx}$-কে x, y দিয়ে প্রকাশ করো।

একটা উদাহরণ দেখি।

Example 60: $x^2y+xy^2 = x-2y$ হল Fig 79-এ দেখানো curve-টার implicit বর্ণনা। লক্ষ করো এই curve-টার তিনটে অংশ আছে। এই implicit বর্ণনার ভিত্তিতে $\frac{dy}{dx}$ বার করো।

SOLUTION: Equation-টার দুপাশকেই x-এর function হিসেবে কল্পনা করে differentiate করে দাও। তাহলে বাঁদিকটা হবে

$$\frac{d}{dx}(x^2y+xy^2) = \frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(xy^2) = \underbrace{2xy + x^2\frac{dy}{dx}} + \underbrace{y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}}.$$

কী করে এটা হল, বোঝা গেল? ধরো প্রথম অংশটা। এটা এসেছে x^2y-কে x-এর function হিসেবে differentiate করে। x^2y হল দুটো জিনিসের গুণফল, x^2 আর y. প্রথমে x^2-কে differentiate করে $2x$ পেলাম, y-কে অপরিবর্তিত রেখে। সুতরাং পাওয়া গেল $2xy$. তারপর x^2-কে অপরিবর্তিত রাখলাম, আর y-কে differentiate করে পেলাম $\frac{dy}{dx}$. গুণ করে হল $x^2\frac{dy}{dx}$. সব মিলিয়ে হল $2xy + x^2\frac{dy}{dx}$. একইভাবে xy^2-কে differentiate করে এসেছে দ্বিতীয় অংশটা।
Equation-টার ডানদিক থেকে আসবে

$$\frac{d}{dx}(x-2y) = 1 - 2\frac{dy}{dx}.$$

এদেরকে মিলিয়ে পাওয়া যাচ্ছে

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx}.$$

এ থেকে $\frac{dy}{dx}$-কে বার করা যায় এইভাবে--

$$(x^2+2xy+2)\frac{dy}{dx} = 1 - 2xy - y^2,$$

অর্থাৎ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy-y^2}{x^2+2xy+2}. \qquad (*)$$

Fig 79

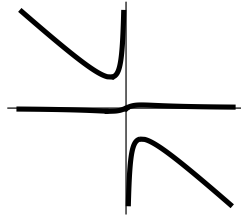
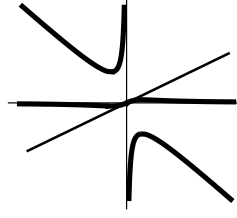



Fig 80

সুতরাং curve-টার উপরে কোনো বিন্দু (x, y) দেওয়া থাকলে, এই ফর্মুলা দিয়ে তুমি সেইখানে curve-টার slope বার করতে পারবে। যেমন ধরো, $(x, y) = (0, 0)$ হল curve-টার উপরে একটা বিন্দু। সেখানে slope-টা কত হবে, সেটা (*)-এ $x = y = 0$ বসালেই পাওয়া যাচ্ছে--

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.$$

এই slope নিয়ে $(0, 0)$ দিয়ে সরলরেখাটা এঁকে দেখিয়েছি Fig 80-তে। সত্যিই সেটা tangent হয়েছে।
তবে যদি দ্যাখো যে, curve-টার উপর কোনো বিন্দু (x, y)-তে (*)-এর নীচের তলার $x^2 + 2xy + 2$-টা 0 হয়ে যাচ্ছে, একমাত্র তাহলেই এই কায়দাটা খাটবে না। আমাদের curve-টার বেলায় অবশ্য এরকম কোনো ঝামেলাজনক বিন্দু নেই। ■

Example 61: If $x^2 + y^2 = 4$, then $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} =$

(A) 4 (B) 0 (C) 1 (D) -1

(JEE2011.50)
SOLUTION: দেওয়া আছে $x^2 + y^2 = 4$, মানে আমাদের পরিচিত circle-টা। লক্ষ করো যে $\frac{x}{y}$-এর মধ্যে y আছে নীচের তলায়। সুতরাং বুঝতেই পারছ যে $y \neq 0$ নিয়ে কাজ করতে হবে। সুতরাং যে দুটো বিন্দুতে tangent-গুলো vertical হয়, তারা বাদ হয়ে গেল। বাকি সব point-এই slope বার করা যাবে implicit differentiation করে। অতএব $x^2 + y^2 = 4$-এর দু দিককে differentiate করে পাই $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$. তার মানে $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. তাই $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$. তাই উত্তর হল (B). ■

Example 62: If $\sin^{-1}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = k$, where k is a constant, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.[2] **(HS2015)**

SOLUTION: একেকজনের এমন স্বভাব থাকে, যেই দেখবে $\sin^{-1}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = k$, অমনি ধাঁ করে $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \sin k$ লিখে অংক কষতে শুরু করে দেবে। একটু ভেবেও দেখবে না, x-ই বা কী আর y-ই বা কী! অবশ্য পরীক্ষা চলাকালীন অত খুঁটিয়ে দেখার বিলাসিতা করা কঠিন। তবে এখন তো আর বই পড়তে পড়তে পরীক্ষা দিচ্ছি না, তাই ভালো করে বুঝে বুঝে এগোই। এখানে--

- একটা ভাগ আছে ($x^2 + y^2$ দিয়ে), তাই দেখতে হবে $x^2 + y^2$-টা যেন 0 হয়ে না যায়।
- একটা $\sin^{-1}$ আছে, তাই তার ভিতরের জিনিসটা $[-1, 1]$-এর বাইরে চলে গেলে হবে না।

এর মধ্যে প্রথম শর্তটা হওয়া মানে $x \neq 0$ আর $y \neq 0$. অর্থাৎ এই কথাটা বলে দেওয়া না থাকলেও আমরা ধরে নেব।

✎Here $x, y \neq 0$.

এবার যেই $y \neq 0$ হয়ে গেল, অমনি $y^2 > 0$. সুতরাং $x^2 - y^2 < x^2 + y^2$ হবেই, তাই $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} < 1$ হচ্ছে। একইভাবে $x^2 > 0$ থেকে পাবে $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} > -1$. সুতরাং $\sin^{-1}$-এর পেটের ভিতরের জিনিসটা $(-1,1)$-এর মধ্যেই থাকছে, তার জন্য আর বাড়তি কোনো শর্ত লাগছে না।

✎So $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \in (-1,1)$.

এবার তবে দলাইমলাই শুরু করা যাক--

✎Here $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \sin k$, a constant.

এইবার এটাকে আমরা সহজ করে লিখতে চাই। তার জন্য বাঁদিকের নীচের x^2+y^2-টাকে ডানদিকে নিয়ে গিয়ে $x^2 - y^2 = (x^2+y^2)\sin k$ করা যায়, তারপর একটু সাজিয়ে লিখলেই--

✎So $\frac{y^2}{x^2} = \underbrace{\frac{1-\sin k}{1+\sin k}}_{c,\text{ say}}$,

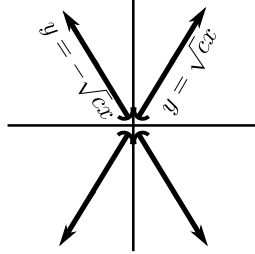
অবশ্য তোমাদের মধ্যে অনেকেই এটা ধাঁ করে লিখে ফেলবে componendo and dividendo (যোগভাগ প্রক্রিয়া) দিয়ে। তা যেভাবেই কর, লক্ষ করো এখানে নীচের তলায় $1+\sin k$ এসে গেছে। সুতরাং হুঁশিয়ার, ওটা আবার 0 হয়ে যেতে পারে না তো? না, পারে না, কারণ--

✎Since $\sin k \in (-1,1)$ and so $1+\sin k \neq 0$.

সুতরাং পেলে

✎Thus $y^2 = cx^2$.

কীরকম সহজ হয়ে গেল, দেখলে? এর গ্রাফটাও এঁকে ফেলা যায় খুব সহজে, কারণ এর মানে হল $y = -\sqrt{c}x$ বা $y = \sqrt{c}x$. এরা দুজনেই দুটো সরলরেখা। তাই গ্রাফটা হবে Fig 81-এর মত। ভালো করে লক্ষ করো--origin-টা বাদ রয়েছে, দেখেছো? কারণ x, y একই সঙ্গে 0 হতে পারে না। আরো লক্ষ করো যে, এটা কোনো function-এর গ্রাফ হতে পারে না, যদিও অংকের ভাষায় একেও আমরা একটা curve বলব। এবার যদি তোমায় curve-টার উপর কোনো বিন্দু দিই (x,y), তবে কিন্তু চোখে দেখেই বলা যায় যে, ওখানে slope-টা $\frac{y}{x}$ হবে। কারণ বিন্দুটা যেখানেই থাক, দুটো সরলরেখার একটাতে আছে। যদি $y = \sqrt{c}x$-র উপর থাকে, তবে slope হবে $\sqrt{c}$ যেটা $\frac{y}{x}$. আবার যদি $y = -\sqrt{c}x$-এর উপরে থাকে, তাহলে slope হবে $-\sqrt{c}$. সেটাও $\frac{y}{x}$. এই কথাটাই প্রমাণ করতে বলেছে।
ছবি দিয়ে যেটা সহজেই বোঝা গেল, সেটাকে অংকের ভাষায় লিখে দেখানোর জন্য $y^2 = cx^2$-এর দুই পাশকে differentiate করে দাও--

Fig 81

✎Hence, differentiating both sides, $2y\frac{dy}{dx} = 2cx$.

Thus, $\because y \neq 0$, we have

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{cx}{y} \\ &= \frac{y^2}{x^2} \times \frac{x}{y} \quad \left[\because c = \frac{y^2}{x^2}\right] \\ &= \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

as required.

■

DAY 15
Parametric differentiation

আমরা কোনো curve-এর কোনো বিন্দুতে slope বার করছিলাম। যদি curve-টা কোনো $y = f(x)$-জাতীয় গ্রাফ হয়, তবে সে কাজটা differentiation দিয়ে করা যাচ্ছিল। যদি কোনো vertical লাইন curve-টার একাধিক জায়গায় লাগে, তবে কিন্তু এরকম $y = f(x)$ আকারে লেখা যাবে না। তাই সাধারণ differentiation-এর কায়দাটাও আর কাজ করবে না। এরকম ক্ষেত্রে slope বার করার জন্য একটা কায়দা গতকাল শিখেছি--implicit differentiation. এর জন্য curve-টাকে এমন একটা equation দিয়ে লেখা হয়, যেখানে '='-এর দুদিকেই x, y মিলেমিশে থাকতে পারে। কিন্তু এই কায়দায় দুটো বড় সমস্যা আছে--

- এক, implicit-ভাবে দেওয়া curve-এর ছবি আঁকা মোটেই সহজ নয়, এমন কি কম্পিউটার দিয়েও আঁকা কঠিন। যেমন ধরো, যদি বলি $(x - y + xy)^2 + e^{x+y} = 2$ তবে তার চেহারা এঁকে ফেলতে কম্পিউটারে বেশ জটিল প্রোগ্রাম লিখতে হবে।
- দুই, অনেক সময়ে আমাদের এমন সব curve নিয়ে কাজ করতে হয়, যেগুলো নিজেই নিজেকে ছেদ করে! যেমন ধরো, 8 সংখ্যাটা লিখলে এরকম একটা curve পাওয়া যায়-- 8। ওই মাঝখানের ক্রসিঙের বিন্দুতে curve-টা নিজেকেই নিজে ছেদ করেছে। এরকম বিন্দুতে implicit differentiation কাজ করে না।

কিন্তু একটা curve-কে implicit-ভাবে না দিয়ে অন্যভাবে দিলে এই দুই সমস্যা এড়ানো যেতে পারে। এরকম একটা পদ্ধতি হল parametric-ভাবে দেওয়া, যেটা এবার আমরা শিখব। ধারণাটা অংকের জগতে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। ভালো করে 8 সংখ্যাটার উদাহরণ দিয়ে বোঝা যাক।

Example 63: আমি সাধারণতঃ 8 লিখি Fig 82-এর মত করে। লক্ষ কর, এখানে পেনটা যখন প্রথমবার ক্রসিংটায় আসছে, তখন সেটা উপর দিকে যাচ্ছে। ওই বিন্দুতে যদি একটা পিঁপড়ে থাকে, তার কাছে মনে হবে যেন ঝড়ের মত একটা পেন এসে একটা সরলরেখা বরাবর ছুটে চলে গেল। সেই সরলরেখাটাই হল ওঠার সময়ে ওই বিন্দুতে tangent-টা। তারপর পেনটা কোথায় গেল, সেটা পিঁপড়েটার নজরের বাইরে। খানিকপর সে দেখবে পেনটা ফের কোথা থেকে ধেয়ে এসে আরেকটা সরলরেখা বরাবর নীচের দিকে ছুটে চলে গেল। এই সরলরেখাটা হল নামার সময়ে ওই বিন্দুতে tangent.
অবশ্য সকলেই যে আমার মত করে 8 লিখবে, এমন কোনো কথা নেই। কেউ হয়তো ঠিক উল্টো পথে পেন চালায়, Fig 83-র মত করে। সেও ওই দুটো tangent-ই পাবে, খালি আমার বেলায় যেটা নামার tangent ছিল, সেটা এখানে ওঠার tangent হবে, এবং আমার ওঠার tangent-টা এখানে নামার পথে আসবে।

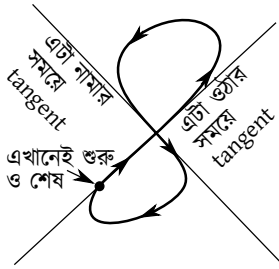
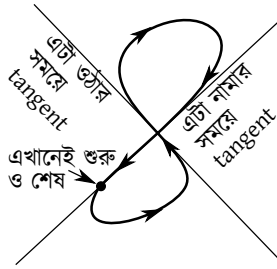
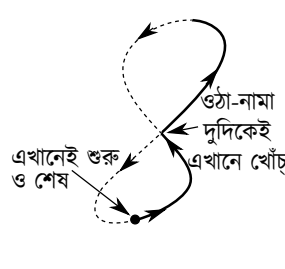
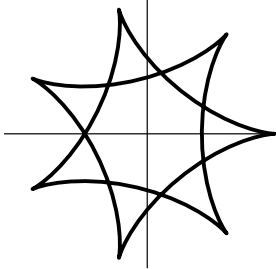



Fig 82 **Fig 83** **Fig 84** **Fig 85**

কিন্তু কেউ যদি কোনো অদ্ভুত কারণে Fig 84-এর মত করে 8 লেখে, তবে তার বেলায় ওঠা-নামা দুই পথেই ওই বিন্দুতে একটা খোঁচ থাকবে, তাই কোনো tangent-ই হবে না! এক্ষেত্রে পিঁপড়েটা দেখবে যে, পেনটা পাঁই পাঁই করে নীচের দিক থেকে এল, তারপর থতমত খেয়ে হঠাৎ বেঁকে ডাইনে মোচড় মেরে অন্য দিকে চলে গেল। আবার খানিক পরে বাঁই বাঁই করে উপর থেকে ফিরে এল, এবং ফের ডাইনে মোচড় মেরে অন্য দিকে বেরিয়ে গেল! ■

তারপরেতে হঠাৎ বেঁকে ডাইনে মোচড় মেরে
ফিরবে আবার বাঁয়ের দিকে তিনটে গলি ছেড়ে
তবেই আবার পড়বে এসে আমড়াতলার মোড়ে--
তারপরে যাও যেথায় খুশি--জ্বালিও নাকো মোরে!

--সুকুমার রায়

বুঝতেই পারছ যে, কেবলমাত্র 8 লেখাটা দেখে কোনোমতেই বোঝার জো নেই, পেনটা ঠিক কখন কোথা দিয়ে গেছে। সেই কারণেই ক্রসিঙের মুখে এসে implicit differentiation থমকে যায়। এখানেই parametric কায়দাটার বাহাদুরি, কারণ এই কায়দায় আমরা শুধু গ্রাফের ছবিটাকে বর্ণনা করেই ক্ষান্ত দিই না, পেনটা কখন কোথায় ছিল সেটাও যত্ন করে লিখে রাখি। একটা উদাহরণ দিলে বুঝতে পারবে।

Example 64: ধরো বললাম যে, একটা curve আঁকার সময়ে পেনটা এমনভাবে চালাব যাতে t সময় পরে পেনটা থাকে $(x(t), y(t))$ বিন্দুতে, যেখানে

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{5}{2}\cos t + \cos\left(\tfrac{5}{2}t\right) \\ y(t) &= \tfrac{5}{2}\sin t - \sin\left(\tfrac{5}{2}t\right). \end{aligned}$$

আরো বলে দিচ্ছি, পেনটা চলবে $t = 0$ থেকে $t = 4\pi$ সময় পর্যন্ত। তাহলে ছবিটা হবে Fig 85-র মত। যেভাবে এটাকে বর্ণনা করলাম, সেটাই হল parametric বর্ণনা। এখানে t-কে বলব **parameter.** ব্যাপারটা ভালো করে বুঝে নাও--এখানে আমরা y-কে x-এর function হিসেবে লিখছি না, বা x, y মিলিয়ে-মিশিয়ে একটা জগাখিচুড়ি করে implicit-ভাবেও লিখছি না। আমরা একটা নতুন variable আমদানি করলাম t, এবং তারপর x, y দুজনকেই এই t-এর function হিসেবে লিখলাম। এই নতুন আমদানি করা variable-টাই হল আমাদের parameter. বেশীরভাগ সময়েই parameter-টাকে সময় বলে ভাবলে সুবিধা হবে, যেমন আমরা ভাবছি। ■

Parametric বর্ণনায় y-কে x-এর function হিসেবে না লিখে x আর y দুজনকেই t-এর function হিসেবে লেখা হয়। এর ফলে t-এর যে কোনো value-তে curve-এর উপর একটা বিন্দু পাওয়া যায়। যদি কোনো ক্রসিং থাকে, তবে t-এর একাধিক value-তে সেই বিন্দুটা আসবে। কারণ পেনটা বিভিন্ন সময়ে সেই একই বিন্দুতে এসেছে বলেই না ক্রসিংটা তৈরী হয়েছে!

এবার দেখি parametric-ভাবে একটা curve দেওয়া থাকলে তার slope কী করে বার করতে হয়। ধরো curve-টাকে দেওয়া আছে $(x(t), y(t))$ হিসেবে, আর t-এর কোনো একটা value দেওয়া আছে, সেই value-তে curve-এর উপর একটা বিন্দু পাবে। সেই বিন্দুতে curve-টার slope বার করতে হবে। কায়দাটা খুবই সহজ, এক লাইনে লিখে দেওয়া যায়--

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}.$$

অর্থাৎ $y(t)$-কে differentiate করো, আর $x(t)$-কেও differentiate করো, তারপর $y(t)$-এর derivative-কে $x(t)$-র derivative দিয়ে ভাগ করে দাও, ব্যস্! পুরো ম্যাজিক! এই ম্যাজিকটা আসলে chain rule-এর থেকে আসে। কিন্তু সে খুঁটিনাটির মধ্যে না গিয়ে আগে বলি ম্যাজিকটা দেখাতে গিয়ে কোথায় কোথায় সমস্যা হতে পারে--

- এমন হতে পারে যে $x(t)$ বা $y(t)$ হয়তো t-এর সেই value-তে differentiable-ই নয়।
- দুজনেই differentiable, কিন্তু $x(t)$-এর derivative-টা হয়তো t-এর ওই value-তে 0, তাই ওকে দিয়ে ভাগ করা যাবে না।

যদি প্রথম সমস্যাটা হয়, তবে parametric differentiation করে $\frac{dy}{dx}$ বার করা যাবে না। সাবধান, এ থেকে যেন সিদ্ধান্ত করে বোসো না যে, $\frac{dy}{dx}$-টা undefined. এমন হতেই পারে যে ওই বিন্দুতে curve-টায় কোনো ভাঙা বা খোঁচ নেই এবং tangent-ও vertical নয় (সুতরাং $\frac{dy}{dx}$ দিব্যি exist করে), কিন্তু parametric differentiation দিয়ে সেটা বার করতে পারছ না, এই যা দুঃখ!
যদি দ্বিতীয় সমস্যাটা হয়, তবে দেখতে হবে $y(t)$-এর derivative-টাও ওইখানে 0 হচ্ছে কিনা। যদি না হয়, তবে জোর দিয়ে বলা যায় যে, ওখানে tangent-টা vertical হবে, সুতরাং slope হবে undefined. কিন্তু যদি $y(t)$-টাও 0 হয়ে যায়, মানে $\frac{dy/dt}{dx/dt}$-টা $0/0$ চেহারার হয়ে যায়, তবে কিছুই জোর দিয়ে বলা যাবে না--খোঁচও হতে পারে, tangent-টা vertical-ও হতে পারে, আবার tangent-টা vertical নাও হতে পারে। একটু পরেই আমরা এরকম কিছু উদাহরণ দেখে সড়গড় হয়ে নেব। তার আগে একটা সহজ উদাহরণ দেখে নিই--

Example 65: আমরা এই circle-টাকে আগেই দেখেছি--

$$x^2 + y^2 = 4,$$

এবং বিভিন্ন বিন্দুতে এর slope-ও বার করেছি। এবার একই কাজ parametric differentiation দিয়ে করো।
SOLUTION: কোনো curve দেওয়া থাকলে, তাকে নানাভাবে parametric আকারে লেখা যেতে পারে (ইংরাজিতে যাকে বলে **parametrisation**)। যেহেতু parametric আকারটা আমরা ঠিক করব, তাই যথাসম্ভব সহজভাবে করাই ভালো। Circle-টার উপর যেকোনো বিন্দুকে একটা কোণ দিয়ে প্রকাশ করা যায় (Fig 86)। ছবিতে যে right angled triangle (সমকোণী ত্রিভুজ)-টা দেখিয়েছি, সেটা থেকেই বুঝবে বিন্দুটা হল $(2\cos t, 2\sin t)$. অতএব একটা parametrisation পেয়েই গেলাম--

$$x(t) = 2\cos t \text{ আর } y(t) = 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

এবার parametric differentiation লাগিয়ে দেখি, কী আসে--

$$x'(t) = -2\sin t \text{ আর } y'(t) = 2\cos t.$$

তাই

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\cot t,$$

যেখানে $t \in [0, 2\pi) \setminus \{0, \pi\}$. এখানে t-কে 0 বা π-এর সমান হতে দেওয়া যাচ্ছে না, কারণ সেখানে $x'(t) = 0$. চট্ করে মিলিয়ে দেখি, চোখের আন্দাজের আঁকা tangent-এর slope-এর সঙ্গে এই $\frac{dy}{dx}$ মিলছে কিনা।
যদি $t = \frac{\pi}{2}$ বসাই, তবে circle-টার সর্বোচ্চ বিন্দুটা পাবে, যেখানে বোঝাই যাচ্ছে tangent-টা হবে horizontal, মানে slope-টা 0 (Fig 87)। এবং আমাদের ফর্মুলাও তাই-ই বলছে কারণ $-\cot\frac{\pi}{2} = 0$. একইভাবে t-এর আরো কিছু value নিয়ে এরকম পরীক্ষা করে দেখতে পারো।
এবার $t = 0$ আর $t = \pi$ নিয়ে একটু গবেষণা করি (Fig 88)। চোখে দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে, এই দুই জায়গাতেই tangent হবে vertical. দেখি সেটা parametric differentiation-এর থেকে বোঝা যায় কিনা। আমরা আগেই দেখেছি যে, এই দুই জায়গাতে $x'(t) = 0$. এবার লক্ষ করো যে, $y'(0)$ আর $y'(\pi)$, দুজনের কেউই 0 নয়। সুতরাং tangent-দুটো vertical হতে বাধ্য। ■

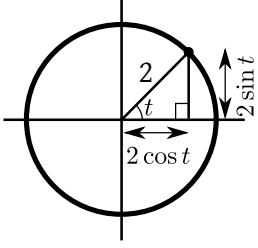
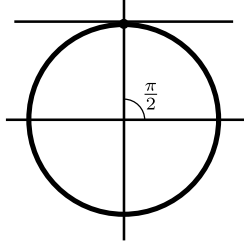
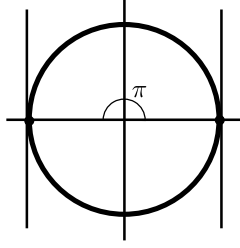
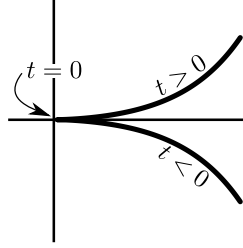



Fig 86 **Fig 87** **Fig 88** **Fig 89**

Example 66: If $x = \log(1+t^2)$, $y = t - \tan^{-1} t$, find $\frac{dy}{dx}$.[3] **(HS2014.4di)**

SOLUTION: প্রথমে অংকটা চোখ বুঁজে parametric differentiation-এর সূত্র লাগিয়ে করি, তারপর কম্পিউটার দিয়ে গ্রাফটা এঁকে মিলিয়ে দেখব।

✎Here
$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Also
$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

এবার $\frac{dy}{dt}$-কে $\frac{dx}{dt}$ দিয়ে ভাগ করতে চলেছি। সুতরাং সাবধান হয়ে নিই, $\frac{dx}{dt}$ যেন 0 হয়ে না যায়।

✎Here $\frac{dx}{dt} = 0$ only at $t = 0$.

So, for $t \neq 0$,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \cdots = \frac{t}{2}.$$

এটাই হল উত্তর। ডট্ ডট্ অংশে কিছু সহজ ধাপ তোমার করার জন্য রেখে দিয়েছি। কিন্তু শেষমেশ কীরকম সহজ একটা উত্তর এল, দেখেছ? এখানে কিন্তু $t = 0$ বসালে কোনোই অসুবিধা নেই। কিন্তু তা বলে লোভে পড়ে যেন $t = 0$ শর্তটা বাদ দিয়ে যেও না। তবে যে কী বিপদ হবে, সেটা Fig 89-এ কম্পিউটার দিয়ে আঁকা গ্রাফটার দিকে তাকালেই বুঝবে। $t = 0$-তে মোটেই slope-টা $\frac{0}{2} = 0$ নয়, ওখানে একটা খোঁচ ওৎ পেতে বসে আছে! ■

এখানে ওই খোঁচের জায়গাটা নিয়ে একটু কথা বলা দরকার। $t = 0$ হলে $\frac{dx}{dt} = 0$ হল। লক্ষ করো যে, সেখানে $\frac{dy}{dt}$-ও কিন্তু শূন্য। তার মানে অন্ধের মত $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ লাগাতে গেলে এখানে $0/0$ এসে যাচ্ছে। এ থেকে তুমি ভেবে বসতে পারো যে, $0/0$ চেহারাটা আসা মানেই খোঁচ থাকা। না, তা নয়, $0/0$ থেকে কিছুই বলা যায় না। নীচের কয়েকটা অংক থেকেই সেটা বুঝবে।

Example 67: $x = t^3$ আর $y = t^6$ যেখানে $t \in \mathbb{R}$. এখানে $t = 0$-তে $\frac{dy}{dx}$ কী হবে?

SOLUTION: $\frac{dx}{dt} = 3t^2$ আর $\frac{dy}{dt} = 6t^5$. এরা দুজনেই $t = 0$-তে শূন্য। সুতরাং $0/0$ চেহারাটা আসছে। তাই কেবলমাত্র parametric differentiation দিয়ে $\frac{dy}{dx}$-এর বিষয়ে কিছুই বলা যায় না। কিন্তু ভালো করে তাকিয়ে দ্যাখো, এখানে আসলে $y = x^2$. যখন $t = 0$, তখন আমরা রয়েছি $(0,0)$-তে, এবং সেখানে $\frac{dy}{dx} = 0$. ■

Example 68: $x = t^6$ আর $y = t^3$ যেখানে $t \in \mathbb{R}$. এখানে $t = 0$-তে $\frac{dy}{dx}$ কী হবে?

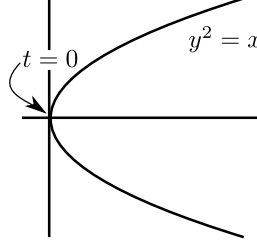



Fig 90

SOLUTION: $\frac{dx}{dt} = 6t^5$ আর $\frac{dy}{dt} = 3t^2$. এরা দুজনেই $t = 0$-তে শূন্য। সুতরাং $0/0$ চেহারাটা আসছে। কিন্তু এখানে আসলে $y^2 = x$, যার গ্রাফটা এঁকেছি Fig 90-এ। যখন $t = 0$, তখন আমরা রয়েছি $(0, 0)$-তে, এবং সেখানে tangent-টা হল y-axis-টা, যেটা সটান vertical. তাই $\frac{dy}{dx}$ হল undefined. ■

সুতরাং দ্যাখো, $0/0$ চেহারাটা খোঁচ থেকেও আসতে পারে, বা tangent-টা vertical হয়ে গেলেও আসতে পারে, বা দিব্যি ভদ্ররকমের tangent থাকলেও আসতে পারে। মোদ্দা কথাটা এই যে, $0/0$ চেহারাটা এসে গেলে parametric differentiation পুরো ঘেঁটে যায়, কিছুই সিদ্ধান্ত করতে পারে না।

15.1 খামোখা কষ্ট!

কোনো curve-কে parametric আকারে আমরা কখন লিখি? যখন x আর y-এর মধ্যে সরাসরি কোনো সহজ সম্পর্ক না পাওয়া গেলেও, ওদের দুজনকেই কোনো parameter দিয়ে সহজে প্রকাশ করা যায়। দুঃখের কথা, পরীক্ষার প্রশ্ন বানানোর তাগিদে অনেক সময়ে লোকে উৎসাহের চোটে উল্টো কাণ্ডটা করে বসে--যেখানে x আর y-এর মধ্যে দিব্যি সহজ সম্পর্ক আছেই, সেখানে মাঝের থেকে একটা উট্‌কো parameter এনে জীবনটাকে খামোখা জটিল করে তোলে! এবার সেরকম কিছু অংক দেখব। এরকম অংকে parametric differentiation ব্যবহার না করে, প্রথমে x আর y-এর মধ্যেকার সহজ সম্পর্কটাকে বার করে নেওয়া ভালো। তারপর সাধারণ differentiation করলেই হবে। তবে এইসব অংক ক্যালকুলাস শেখার জন্য কিছুমাত্র প্রয়োজনীয় নয়। যারা পরীক্ষা পাশের জন্য এই বইটা পড়ছ, তারা বাদে বাকীরা নীচের অংশটুকু নিশ্চিন্তে বাদ দিয়ে এক লাফে 112 নম্বর পাতায় second derivative-এর আলোচনায় চলে যেতে পারো।
নীচে যে অংকদুটো করতে চলেছি সেখানে $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ইত্যাদিদের দেখা মিলবে। এদের বিষয়ে আমরা প্রথম অধ্যায়েই আলোচনা করেছিলাম। কিন্তু এখানে একটু মনে করিয়ে দিই। প্রথমেই মনে রেখো যে, θ-র যেকোনো value-র জন্যই কিন্তু $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ হয় না! তার জন্য θ-র উপর একটা শর্ত লাগে। একইভাবে $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$ হওয়া বা $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ হওয়ার জন্যও একটা শর্ত লাগে। শর্তগুলো এইরকম--

- $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ হবে কেবল তখনই যখন $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$ হবে কেবল তখনই যখন $\theta \in [0, \pi]$.
- $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ হবে কেবল তখনই যখন $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

এই জায়গাগুলো মোটা করে দেখিয়েছি Fig 91, Fig 92 আর Fig 93-এ। এই সব শর্তের বাইরে θ-র কোনো value নিলে কী করে $\sin^{-1}(\sin\theta)$, $\cos^{-1}(\cos\theta)$ ইত্যাদি গ্রাফ দিয়ে বার করতে হয়, সেটাও দেখিয়েছি।
আরো কয়েকটা জিনিসও মনে করিয়ে দিই--

- $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$,
- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$,
- এবং তা থেকে $\cos 4\theta = 8\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 1$.

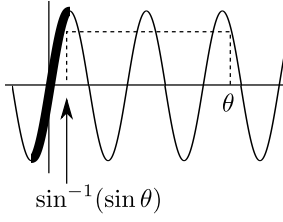



Fig 91

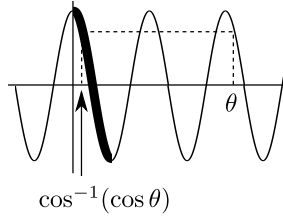



Fig 92

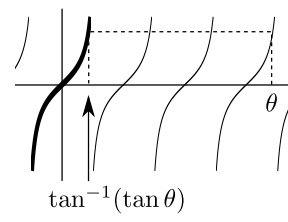



Fig 93

এদের মধ্যে শেষেরটা যেন মুখস্থ করার চেষ্টা কোরো না। ওটা এবারের অংকটায় লাগবে বলে লিখে দিয়েছি।

Example 69: Find $\frac{dy}{dx}$ where $x = \cos^{-1}(8t^4 - 8t^2 + 1)$ and $y = \sin^{-1}(3t - 4t^3)$, $\left[0 < t < \frac{1}{2}\right]$.[4]

(HS2015.2ci)

SOLUTION: এখানে শেষ পর্যন্ত আমরা দেখব যে, আসলে $y = \frac{3x}{4}$ হবে। কিন্তু মাঝখানে একটা t ঢুকিয়ে এমন কাণ্ড বাঁধিয়েছে যে, এই সহজ সম্পর্কটা খুঁজে পাওয়াই দুঃসাধ্য!

প্রথমেই ওই $3t - 4t^3$-টার দিকে তাকাও। এটা দেখেই তোমার এই ফর্মুলাটা মনে পড়া উচিত--

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

সুতরাং $t = \sin\theta$ বসালে সুবিধা হতে পারে--

✎Let $t = \sin\theta$ where $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

ওই $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ শর্তটা এসেছে, কারণ $0 < t < \frac{1}{2}$ বলা ছিল (Fig 94)। এই শর্তটা খুবই দরকারী। সেটা এক্ষুণি দেখবে।

✎Then $3t - 4t^3 = \sin 3\theta$.

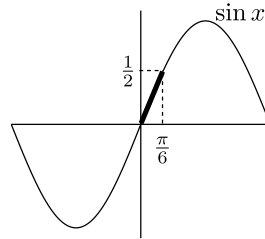
So $y = \sin^{-1}(\sin 3\theta) = 3\theta$, Since $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

এখানেই শর্তটা কাজে লাগল। একটু আগেই বলেছি যে, যেকোনো A-র জন্যই $\sin^{-1}(\sin A)$ কিন্তু A হয় না। যদি $A \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ হয়, তবেই ওরা সমান। এখানে A-র ভূমিকা পালন করছে 3θ. যেহেতু $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, তাই $3\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

এইবার একটা অগ্নিপরীক্ষা আসছে, তোমাকে কোনোভাবে আন্দাজ করতে হবে যে, $\cos 4\theta = 8\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 1$. এটা অবশ্য প্রমাণ করা খুবই সহজ ($\cos 4\theta$-কে $\cos(2 \times 2\theta)$ হিসেবে লিখে চেষ্টা করেই দ্যাখো!)

✎We know that $\cos 4\theta = 8\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 1$.

So $x = \cos^{-1}(\cos 4\theta) = 4\theta$, Since $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

Fig 94

এখানে আবার সেই শর্তটা কাজে লাগছে। আমরা জানি যে, $\cos^{-1}(\cos A) = A$ হবে খালি তখনই, যখন $A \in [0, \pi]$ হবে। এখানে A-র জায়গায় রয়েছে 4θ. যেহেতু $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, তাই $4\theta \in \left(0, \frac{4\pi}{6}\right) \subseteq [0, \pi]$.

✎Thus, $x = 4\theta$ and $y = 3\theta$.
Hence $y = \frac{3x}{4}$.
Hence $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$.

■

Example 70: Find the differential coefficient of $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ with respect to $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.[2] **(HS2016.cii)**

SOLUTION: এই অংকটায় কিছু সমস্যা আছে। প্রথম সমস্যা হল ভাষা--"Differential coefficient of একটা function-এর with respect to আরেকটা function", এইভাবে সাধারণতঃ অংকের জগতে লেখা হয় না। কিন্তু $\frac{dy}{dx}$ -কে অনেক সময়েই "differential coefficient of y with respect to x" লেখা হয়। এখানে আসলে বলতে চেয়েছিল এইরকম--

Find $\frac{dz}{dy}$ where $y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ and $z = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

আমরা সেইমত লিখে নিই--

✎Let $y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ and $z = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$,

এখানে parameter-এর ভূমিকা পালন করছে x.
এই অংকটায় দ্বিতীয় সমস্যা হল, x কী কী value নিতে পারে, সেটা বলে দেয় নি। যেহেতু নীচে এক জায়গায় $1 - x^2$ আছে, তাই $x \neq \pm 1$ নিতে হবে বোঝা যাচ্ছে--

✎where $x \neq \pm 1$.

আমরা জানি যে, $\sin\theta$ আর $\tan\theta$-কে $t = \tan\frac{\theta}{2}$ দিয়ে লেখা যায় এইভাবে--

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \text{ আর } \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}.$$

সুতরাং হাত নিশ্চয়ই নিশ্‌পিশ্ করে উঠছে $x = \tan\frac{\theta}{2}$ বসানোর জন্য! তথাস্তু--

✎We put $x = \tan\frac{\theta}{2}$,

দাঁড়াও, একটা শর্ত ছিল $x \neq \pm 1$. তার জন্য θ-র উপর কী শর্ত চাপে দেখতে হবে। যদি $\tan t$-এর গ্রাফটা ভাবো (Fig 95), তবেই বুঝবে যে t যখন $-\frac{\pi}{2}$ থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত যায়, তখন $\tan t$-টা পুরো $\mathbb{R}$ পার করে দেয়। আর এর মধ্যে $\tan t = \pm 1$ হয়, যখন $t = \pm\frac{\pi}{4}$ হয়। আমাদের অংকে t-এর ভূমিকায় রয়েছে $\frac{\theta}{2}$, তাই $\theta = 2t$. সুতরাং θ যেতে পারে $-\pi$ থেকে π পর্যন্ত, খালি $\pm\frac{\pi}{2}$ হলে চলবে না--

✎where $\theta \in (-\pi, \pi) \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$.

এতক্ষণ x ছিল আমাদের parameter. সেটাকে তখন θ দিয়ে লেখা গেছে, তখন y আর z-কেও θ দিয়ে লেখার চেষ্টা করি--

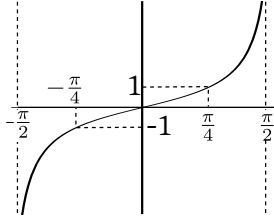



Fig 95

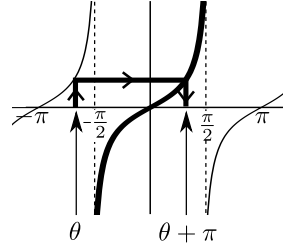



Fig 96

$$\begin{aligned} y &= \tan^{-1}(\tan\theta) \\ &= \begin{cases} \theta+\pi & \text{if } \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ \theta & \text{if } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \theta-\pi & \text{if } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \end{aligned}$$

এইটা কী করে পেলাম বোঝার জন্য tan-এর গ্রাফ দিয়ে না ভাবলে মুস্কিল। বোঝানোর জন্য $\theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ কেসটা করে দেখিয়েছি Fig 96-এ।

$$\begin{aligned} z &= \sin^{-1}(\sin\theta) \\ &= \begin{cases} -\pi-\theta & \text{if } \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ \theta & \text{if } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi-\theta & \text{if } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \end{aligned}$$

এখানে sin-এর গ্রাফটা ভাবলে বুঝবে কী করে এসব পেলাম।
এবার z-কে সরাসরি y দিয়ে লিখে ফেলা যাবে--

$$z = \begin{cases} -y & \text{if } \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ y & \text{if } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ -y & \text{if } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

এবার তো differentiate করা জলের মতন সোজা--

$$\frac{dz}{dy} = \begin{cases} -1 & \text{if } \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \text{if } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \text{if } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

যেহেতু মূল অংকে θ বলে কিছু ছিল না, ছিল x, তাই উত্তরটাও x দিয়েই লেখা ভালো--

✎

$$\frac{dz}{dy} = \begin{cases} -1 & \text{if } x < -1 \\ 1 & \text{if } x \in (-1,1) \\ -1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

তুমি হয়তো এত কাণ্ড দেখে আঁতকে উঠে বলবে--ওরে বাবা, মোটে দুই নম্বরের জন্য এত সব? কিন্তু কী করি বলো, অংকের দুনিয়ায় তো সবই যুক্তি মেনে এগোতে হয়, নম্বরের কোনো মূল্য সেখানে নেই। তবে এখানে তোমাকে চুপিচুপি একটা কথা বলে রাখি--

> আমার কেমন জানি একটা সন্দেহ হচ্ছে যে, যিনি এই অংকটা পরীক্ষায় দিয়েছিলেন, তিনি এতসব কিছুই ভাবেন নি। তিনি আসলে মনে মনে $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ আর $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ ধরেই কাজ করে গেছেন, মানে আমাদের সমাধানের $x \in (-1,1)$ কেসটাই খালি তাঁর মাথায় ছিল। সেক্ষেত্রে অংকটা অবশ্যই খুবই সোজা এবং উত্তর হবে 1.

তবে ওই যে বললাম, অংকের জগতে যুক্তির বাইরে কিছু হয় না। সুতরাং আমরা যে লম্বা সমাধানটা করলাম, সেটাই সঠিক সমাধান, তা সে যতই লম্বা লাগুক না কেন! ■

15.2 Second derivative

এবার দেখব কী করে parametric differentiation করে second derivative বার করা যায়।

Example 71: If $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$ and $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$, then find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $\theta = \frac{\pi}{2}$.[4] **(HS2015.2cior)**

SOLUTION:

✎Here

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta,$$

and

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta.$$

So for all values of θ where $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$, we have

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\sin 2\theta - \sin\theta}.$$

আমাদের বার করতে হবে $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. এখানেও ফের parametric differentiation লাগাব। প্রথমে $\frac{dy}{dx}$-কে একটা নাম দিয়ে নাও, ধরো z.

✎Let $z = \frac{dy}{dx}$.

তাহলে তোমার কাজ হল $\frac{dz}{dx}$ বার করা। এখানে x আর z দুজনেই θ-র function. অতএব ফের parametric differentiation-এর সূত্র লাগালে হবে $\frac{dz}{dx} = \frac{dz/d\theta}{dx/d\theta}$. এর মধ্যে $\frac{dx}{d\theta}$ তো বার করেইছি। নতুন করে বার করতে হবে খালি $\frac{dz}{d\theta}$, অর্থাৎ--

✎So
$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{(-\sin\theta + 2\sin 2\theta)(\sin 2\theta - \sin\theta) - (\cos\theta - \cos 2\theta)(2\cos 2\theta - \cos\theta)}{(\sin 2\theta - \sin\theta)^2}.$$

না, এদেরকে কাটাকাটি করে সহজ করে লেখার পিছনে সময় নষ্ট কোরো না। তোমাকে তো খালি $\theta = \frac{\pi}{2}$-তে কাজ করতে বলেছে। সেইটা বসিয়ে দ্যাখো কী আসে (মনে রেখো $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ আর $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. আবার $\sin\pi = 0$ এবং $\cos\pi = -1$)।

✎At $\theta = \frac{\pi}{2}$,
$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{(-1)(-1) - (1)(-2)}{(-1)^2} = 3,$$
and
$$\frac{dx}{d\theta} = -2(1) + 2(0) = -2.$$
So the answer is
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{dz}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

■

Exercise 37: If $x = \sin\theta$ and $y = \cos p\theta$, where p is a constant, prove that
$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 + p^2y = 0.$$

[3] **(HS2014.4dii)**

HINT:

এখানে notation-টা বুঝে নাও। y_1 মানে হচ্ছে $\frac{dy}{dx}$ আর y_2 হল $\frac{d^2y}{dx^2}$.
এই অংকটা স্রেফ গায়ের জোরে কষে গেলেই হবে। মূল ধাপগুলো বলে দিচ্ছি--

- $\frac{dy}{d\theta} = -p\sin p\theta$ আর $\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$.
- সুতরাং $y_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{p\sin p\theta}{\cos\theta}$. এখানে $\cos\theta \neq 0$ ধরে নেওয়া ছাড়া পথ নেই, কারণ নইলে y_1 বার করা নিয়ে সমস্যা হবে।
- $\frac{dy_1}{d\theta} = -\frac{p^2\cos p\theta\cos\theta + p\sin p\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$.
- $y_2 = \frac{dy_1}{dx} = -\frac{p^2\cos p\theta\cos\theta + p\sin p\theta\sin\theta}{\cos^3\theta}$
- $(1 - x^2)y_2 = -\frac{p^2\cos p\theta\cos\theta + p\sin p\theta\sin\theta}{\cos\theta}$
- $xy_1 = -\frac{p\sin p\theta\sin\theta}{\cos\theta}$.

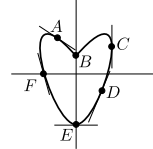
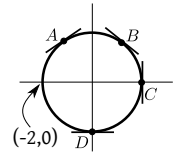
আরো করে দিতে হবে? ধ্যাৎ, এবার নিজে নিজে করো!

■

Answers

1. (*i*) Increasing. (*ii*) Decreasing. (*iii*) Decreasing. (*iv*) Stationary. **2.** হ্যাঁ, কারণ

$f(x) = m_1x + c_1$ আর $g(x) = m_2x + c_2$ হলে $m_1, m_2 > 0$ বলা আছে। তাই
$f(x) + g(x) = (m_1 + m_2)x + (c_1 + c_2)$-তেও দ্যাখো x-এর সঙ্গে গুণ হয়ে আছে যে সংখ্যাটা (মানে $m_1 + m_2$), সেটা > 0. **3.** (A). **4.** f_1, f_3, f_4, f_2. **5.** চোখের আন্দাজে--A, C, D-র slope হল < 0, আর E-এর slope হচ্ছে $= 0$, এবং B-র slope হল > 0. চোখে দেখে ছোটো থেকে বড় slope হিসেবে সাজালে--সবচেয়ে কম D, তারপর A আর C সমান, তারপর E আর সবচেয়ে বেশী slope হল B-এর। অংক কষে--A-র slope -1, B-এর $\frac{2}{3}$, C-এর -1, D-এর -2 আর E-এর 0. **6.** প্রথম আর তৃতীয় গাড়ির গ্রাফের slope সমান, তাই ওদের velocity-ও সমান হতে বাধ্য। দ্বিতীয় গাড়ির গ্রাফের slope বেশী, তাই velocity-ও বেশী। লক্ষ করো velocity-গুলো না জেনেই কেবলমাত্র গ্রাফ দেখেই উত্তর পেয়ে গেলাম। **7.** $x > 0$ হলে increasing, আর $x < 0$ হলে decreasing. যদি $x = 0$ হয়, তবে সেখানে stationary. **8.** যখন x হবে $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$. **9.** কোত্থাও না! **10.**

11. **12.** (*i*) 3. (*ii*) -1. (*iii*) 4. (*iv*) 3. **13.** (*i*) $3x^2$. (*ii*) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (*iii*) $-\frac{x^{-5/4}}{4}$ (*iv*) $-3x^{-4}$. **14.** হ্যাঁ, $x = 1 \times x + 0$ থেকে পাচ্ছি $m = 1$. আবার $x = x^1$-কে differentiate করলে হয় $1 \times x^{1-1} = 1$. **15.** $\frac{1}{x}$. **16.** হবে না মানে? একশোবার[6] হচ্ছে! **17.** $\cos x$. **18.** (*i*) $-2\sin x$. (*ii*) $\frac{1}{2}e^x$. (*iii*) $-\frac{1}{2x}$. **19.** (A). যদি differentiate করো, তবে পাবে $\alpha - 2x$. সেটা $0 < x < 1$-এর জন্যই > 0 হবে, যখন $\alpha \geq 2$. সাবধান, $\alpha > 2$ লাগবে না কিন্তু! গ্রাফ দিয়ে ভাবলে এইরকম--গ্রাফটা একটা parabola, দু হাত নীচের দিকে, x-axis-কে ছেদ করে $x = 0$ আর $x = \alpha$-তে। ছবি আঁকলেই দেখবে এটা strictly increasing হবে $\frac{\alpha}{2}$-এর বাঁদিকে, তার মানে পুরো $(0, 1)$-টাই $\frac{\alpha}{2}$-এর বাঁদিকে থাকতে হবে, অর্থাৎ সেই $\alpha \geq 2$. **20.** (*i*) $\cos x \log_e x + \frac{\sin x}{x}$. (*ii*) $2\tan x \sec^2 x$ (*iii*) $6x^2(3e^x + 1)\log_e x + 6x^3e^x \log_e x + 2x^2(3e^x + 1)$.
21. $-\sin x \tan x + \cos x \sec^2 x = \cos x$. না এসে যাবে কোথায়? **22.** অবশ্যই হচ্ছে! $\frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \sec^2 x$. **23.** $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$, $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$, $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$. **24.** (*i*) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. (*ii*) $\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$. (*iii*) $-xe^{-x^2/2}$. **25.** (*i*) $3e^{3x-5}$ (*ii*) $4\sin(3 - 4x)$ (*iii*) $-e^{-x}$. **26.** আমরা দেখেছিলাম $f^{(4)}(x) = \sin x$, যেটা ফের $f(x)$-এর সমান। সুতরাং প্রতি চারবার differentiation-এর মাথায় $f(x)$ ফিরে ফিরে আসবে। 73-র আগে 4 দিয়ে ভাগ যায় 72. সুতরাং $f^{(72)}(x) = f(x) = \sin x$ হবে। তাই $f^{(73)}(x) = \cos x$ হতে বাধ্য। **27.** (A). **28.** (A). **29.** (B). **30.** (A)

31. (A). **32.** (B). **33.** (A) **34.** B-তে খোঁচ আছে। C-তে একেবারে vertical হচ্ছে। A আর F-এ negative, D-তে positive, আর E-তে 0. **35.** না, কোথাও কোনো খোঁচ নেই।

$(-2, 0)$ বিন্দুতেও tangent-টা vertical হবে। **36.** -1.

---

[6] না না, খালি একশোবারই নয়, অসংখ্যবার হচ্ছে, যখনই $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ আকারের হবে, তখনই হচ্ছে।

Chapter III
Applications of differentiation

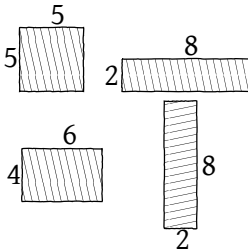
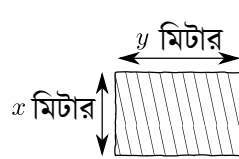
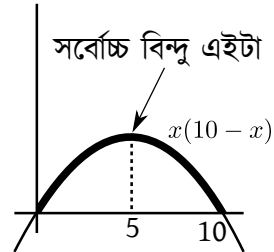
DAY 16
Maximum বা minimum বার করা (part 1)

আগের অধ্যায়ে আমরা differentiate করার নানারকম কায়দাকানুন শিখেছি। বিজ্ঞানের জগতে এদের বহু প্রয়োগ আছে। তাদেরই কিছু পরিচয় আমরা এই অধ্যায়ে পাব। শুরু করব একটা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ দিয়ে--কোনো function-এর maximum বা minimum বার করা। প্রথমে ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক।

16.1 ছবি দিয়ে বোঝা

Example 1: ধরো একজন লোক খানিকটা জায়গা বেড়া দিয়ে ঘিরে বাগান করতে চায়। বাগানটাকে হতে হবে একটা

rectangle (আয়তক্ষেত্র)। লোকটার কাছে মোট বেড়া আছে 20 মিটার, তাই বাগানের perimeter (পরিসীমা) হতে হবে 20 মিটার কাজটা নানাভাবে করা যায়, যেমন দেখিয়েছি Fig 1-এ। এর মধ্যে একটা square (বর্গক্ষেত্র)-ও আছে, কারণ square-ও একধরণের rectangle. প্রশ্ন হল বাগানের চেহারাটা কীভাবে নিলে বাগানের area (ক্ষেত্রফল) সবচেয়ে বেশী হবে?

SOLUTION: লক্ষ করো যে, যদি rectangle-টা Fig 2-র মত নিই, তবে $2(x+y)=20$ হতে হবে। সুতরাং $y=10-x$ হতেই হবে। অতএব যদি কোনোভাবে x বার করে ফেলতে পারি, তবে y-ও আপনেই বেরিয়ে যাবে।
এখানে area হল $xy=x(10-x)$ মিটার^2.
তার মানে আমাদের কাজ হল x-এর এমন value বার করা যাতে $x(10-x)$ যথাসম্ভব বড় হয়, অর্থাৎ maximum হয়। এই কাজটা আমরা গ্রাফ এঁকে করতে পারি। এখানে $x(10-x)=-x^2+10x$ হল একটা quadratic, তাই এর গ্রাফটা একটা parabola. যেহেতু x^2-এর আগে মাইনাস আছে, তাই হাতদুটো নীচের দিকে। এটা 0 হবে যখন $x=0$ বা $x=10$, সুতরাং parabola-টা x-axis-কে ছেদ করবে ওই দুটো বিন্দুতে। তাই গ্রাফটা হবে Fig 3-এর মত। এখানে x অবশ্যই ≥ 0 হবে (বেড়ার দৈর্ঘ্য আবার <0 হয় কী করে?) আবার $x\leq 10$-ও হতে হবে (নইলে $y=10-x<0$ হয়ে যাবে!)। মানে $x\in[0,10]$ হবে। গ্রাফের ওই অংশটুকু মোটা করে দেখিয়েছি। ছবি দেখেই বুঝতে পারছ নিশ্চয়ই যে, maximum-টা হবে parabola-টার পিঠটা যেখানে পাহাড়ের চূড়ার মত সবচেয়ে উঁচু হয়ে রয়েছে, এবং সেটা হল 0 আর 10-এর ঠিক মধ্যবিন্দুতে, মানে 5-এ। তার মানে $x=5$ নিলে area-টা maximum হবে। সেক্ষেত্রে $y=10-x=5$

হবে, অতএব বাগানটা square হলে পরেই তার area-টা maximum হবে। ■

এই রকম অংক বাস্তব জীবনে মানুষকে হামেশাই করতে হয়--আমাদের হাতে কিছু উপকরণ থাকে (যেমন, এই অংকে ছিল বেড়া), সেটা দিয়ে আমরা কিছু করতে চাই (বাগান করা), কাজটা নানাভাবে করা যায়, আমরা চাই সবচেয়ে ভালোভাবে করতে (যেমন area-কে maximum করতে চাই)। কী করে সেটা করা যায়, সেটাই হয় প্রশ্ন। এই অংকে আমরা গ্রাফ এঁকে সহজে পার পেয়ে গেলাম, কারণ area-র গ্রাফটা একটা parabola হয়ে গেল। কিন্তু সবসময়েই তো আর এমন সুবিধা পাওয়া যাবে না! তখন অনেক সময়েই differentiation ব্যবহার করে উত্তর বার করা যায়। অংক আর physics-এ তো বটেই, এমনকি statistics, economics আর engineering-এও এই কায়দাটার বহুল প্রয়োগ। কীভাবে টাকা খাটালে সবচেয়ে বেশী লাভ পাওয়া যায়, বা কীভাবে ব্রীজ বানালে সবচেয়ে বেশী মজবুত হয়--এই সব প্রশ্নেরই সমাধান করা যায় differentiation-এর কায়দাটা দিয়ে, যেটা আমরা এবার শিখব। কিন্তু তার আগে ছবি ব্যবহার করে কয়েকটা ভাষা শিখে নিই। আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে, maximum হল গ্রাফের চূড়া। এই চূড়ার নানা রকম ছবি হতে পারে।

- যেমন ধরো, একই গ্রাফে অনেকগুলো চূড়া থাকতে পারে (Fig 4)। তখন প্রতিটা চূড়াকে বলে একেকটা **local maximum**. খুঁটিয়ে বললে, যদি $x = a$-তে একটা চূড়া থাকে, তবে $x = a$-কে বলে একটা local maximum. যদি একটাই চূড়া থাকে, তাহলে সেটাই একমাত্র local maximum.
- বিভিন্ন চূড়ার মধ্যে যে চূড়াটা সবচেয়ে উঁচু তাকে বলে **global maximum**. সবচেয়ে উঁচু চূড়া অবশ্য একাধিকও থাকতে পারে (Fig 5)।
- চূড়াটা অনেক সময়ে টেবিলের মত চ্যাপ্টাও হতে পারে। সেক্ষেত্রে টেবিলের পুরো বিস্তৃতি জুড়ে সব বিন্দুই local maximum. যেমন Fig 6-এ এরকম দুটো অংশ আছে। হ্যাঁ, অবাক লাগলেও এটা সত্যি যে, ওই নীচের সমতল অংশের প্রতিটা বিন্দুও একেকটা local maximum! আসলে কোনো $x = a$-তে local maximum থাকা মানে হল a-কে ঘিরে অন্ততঃ খানিকটা দূর পর্যন্ত গ্রাফটা কোথাও $f(a)$-র উপরে মাথা তোলেনি ($f(a)$-র সমান হলে আপত্তি নেই)।
- যদি কেউ local বা global উল্লেখ না করে খালি maximum বলে, তবে global maximum বুঝতে হয়।

একইভাবে minimum-এর বেলাতেও **local minimum** আর **global minimum** বলে দুটো ব্যাপার আছে। গ্রাফটার উপর বৃষ্টি পড়লে যেখানে যেখানে জল জমত, সেগুলো হল একেকটা local minimum. বোঝার জন্য Fig 7 দ্যাখো। এদের মধ্যে সবচেয়ে গভীর খোঁদলটাকে (বা খোঁদলগুলো, যদি সবচেয়ে বেশী গভীরতার একাধিক খোঁদল থাকে, তাদেরকে) বলে একেকটা global minimum.
এবার কিছু ইংরাজির প্যাঁচ শিখে রাখো--

- maximum শব্দটা বহুবচনে কিন্তু maximums হয় না, ওর বহুবচন হল **maxima**. তেমনি minimum-এর বহুবচন হল **minima**.
- অনেক সময়ে maximum আর minimum একইসঙ্গে বোঝাতে হয়, তখন বলে **extremum** (বহুবচনে **extrema**)। যেমন ধরো, যদি কোনো প্রশ্নে বলে $f(x)$-এর local extrema বার করতে, তবে যাবতীয় local maximum আর local minimum বার করতে হবে।

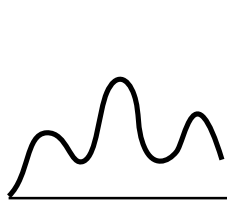
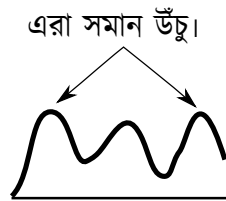
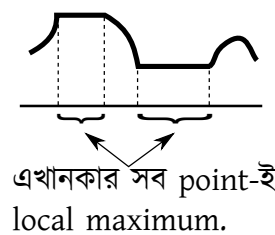
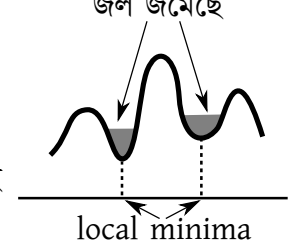
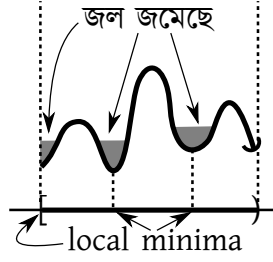



Fig 8

যদি কোনো function-এর domain হয় $[a, b]$ বা $[a, b)$ বা $(a, b]$-র মত, তবে যে প্রান্তে চৌকো ব্র্যাকেট রয়েছে, সেখানেও maximum বা minimum থাকতে পারে, যদিও সেখানে চূড়া বা খোঁদলটার খালি একটা অর্ধেকই থাকবে। বোঝার জন্য Fig 8-এর বাঁদিকের প্রান্তটা দ্যাখো।

16.2 Differentiation দিয়ে করা

বেড়া বাঁধার অংকটার দিকে ফিরে তাকাই। আমরা গ্রাফটার দিকে তাকিয়েই বুঝে গিয়েছিলাম চূড়াটা কোথায়। আমরা আসলে মনে মনে ওটার গা বেয়ে বাঁদিক থেকে ডানদিকে দ্রুত চোখ বুলিয়ে নিয়েছিলাম, ঠিক যেন একটা লোক গ্রাফটার উপর দিয়ে হেঁটে বাঁদিক থেকে ডানদিকে যাচ্ছে। তাহলে লোকটা 5-এর আগে পর্যন্ত উঠছে, আর 5-এর পরে নামছে, এবং 5-এ কোনো ভাঙা নেই। এ থেকেই বলা যাচ্ছে যে 5-এ একটা চূড়া থাকতে বাধ্য। এখানে ভাঙা না থাকার দরকারটা বুঝতে পারবে Fig 9 দেখলেই।

এই ওঠানামার সঙ্গে differentiation-এর সম্পর্ক তো আমরা জানিই--$f'(x) > 0$ মানে ওঠা, $f'(x) < 0$ মানে নামা, আর $f'(x) = 0$ মানে সমতল। সুতরাং এমন কোনো $x = a$ যদি পাও (Fig 10), যাতে তার বাঁদিকে $f'(x) \geq 0$ এবং ডানদিকে $f'(x) \leq 0$ তবে $x = a$-তে $f(x)$-এর (global) maximum থাকতে বাধ্য (ঠিক ওইখানটায় কোনো ভাঙা না থাকলে)।

এবার differentiation-এর কায়দাটা দিয়ে বাগানের অংকটা আবার করি--

Example 2: বাগানের অংকে আমাদের কাজ ছিল $f(x) = x(10-x)$-এর maximum বার করা, যেখানে $x \in [0, 10]$.

এই কাজটা এবার differentiation দিয়ে করো।

SOLUTION: এখানে $f'(x) = 10-2x$. লক্ষ করো যে, $x < 5$ হলে $f'(x) \geq 0$ হবে[1], এবং $x > 5$ হলে $f'(x) \leq 0$ হবে। আর আমরা জানি যে $f(x)$-এর গ্রাফে কোনো ভাঙা নেই। সুতরাং $x = 5$-এ maximum হতে বাধ্য। ■

লক্ষ করো যে $f'(5) = 0$ হয়েছে, কিন্তু সেটা মোটেই গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়। যদি $f'(5)$ undefined-ও হত, তাতেও অসুবিধা হত না (খালি যেন $x = 5$-এ কোনো ভাঙা না থাকে)। নীচের অংকটাই তার একটা উদাহরণ--

Example 3: $f(x) = 5 - |x|$. এর গ্রাফ দেখিয়েছি Fig 11-এ। ছবি দেখেই বুঝছ যে, $x = 0$-তে maximum আছে।

এটা differentiation দিয়ে কী করে বুঝতে?

[1]আসলে $f'(x) > 0$ হবে, কিন্তু '$\geq$'-এর মধ্যে '$>$'-ও ধরা আছে, তাই আমরা $f'(x) \geq 0$-ও বলতে পারছি।

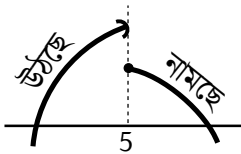
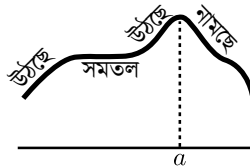



Fig 9 **Fig 10** **Fig 11**

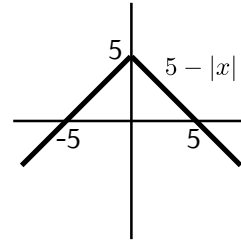
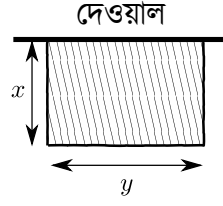
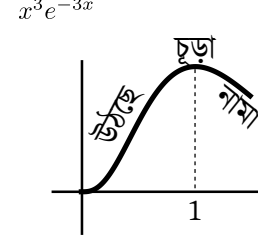



Fig 12 **Fig 13**

SOLUTION: $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 0 \\ -1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$. লক্ষ করো যে $x = 0$-তে গ্রাফটায় একটা খোঁচ আছে, তাই $f'(x)$ কিন্তু $x = 0$-তে undefined. কিন্তু তাও আমরা নিশ্চিন্তে বলতে পারি যে, $x = 0$-তে maximum আছে, কারণ তার বাঁদিকে $f'(x) \geq 0$, আর ডানদিকে $f'(x) \leq 0$. ■

এবার তোমার নিজের করার জন্য একটা অংক দিই--

Exercise 1: আবার বেড়া দিয়ে বাগান ঘেরার অংক, কিন্তু এবার এক দিকে একটা দেওয়াল আছে, তাই সে দিকে বেড়া দিতে হবে না (Fig 12)। মোট বেড়ার দৈর্ঘ্য এখানেও 20 মিটার। বাগানটাকে একটা rectangle হতে হবে। সবচেয়ে বেশী area পাওয়ার জন্য মাপ-জোক কীভাবে নিতে হবে? এখানেও কি square নিলেই maximum হবে? ■

এইবার একটা অংক দেখব যেখানে গ্রাফ আঁকা খুব সহজ নয়, কিন্তু differentiation-এর কায়দাটা লাগালেই অংকটা চট্ করে হয়ে যাবে।

Example 4: Let $f(x) = x^3e^{-3x}$, $x > 0$. Then the maximum value of $f(x)$ is

(A) e^{-3} (B) $3e^{-3}$ (C) 27 (D) ∞

(JEE2011.63)
SOLUTION: আমরা প্রথমে $f(x)$-কে differentiate করব, এবং দেখব কোথায় সেটা > 0 হয়, কোথায়ই বা < 0 হয়। এখানে $f(x)$-টা সর্বত্রই differentiable, কোথাও কোনো খোঁচ বা ভাঙার গল্প নেই--

$$f'(x) = \cdots = 3e^{-3x}x^2(1-x).$$

এখানে কাজ করতে হবে $x > 0$ নিয়ে, সেখানে $3e^{-3x}x^2$ সর্বদাই > 0, তাই $f'(x)$-এর চিহ্নের উপর ওর কোনো প্রভাব নেই। সুতরাং দেখতে হবে $1 - x$ কখন ≥ 0 আর কখন ≤ 0 হয়। দেখাই যাচ্ছে যে, $1 - x \lesseqgtr 0 \iff 1 \lesseqgtr x$. তার মানে x প্রথমে বাড়ছে, $x = 1$-এ এসে মোড় ঘুরে নীচের দিকে নেমে যাচ্ছে। সুতরাং $x = 1$-এই maximum-টা হবে। সেটা হল $f(1) = e^{-3}$. তাই উত্তর হল (A). এখানে $f(x)$-এর গ্রাফটা খালি হাতে আঁকা সহজ নয়। কিন্তু বোঝার সুবিধার জন্য কম্পিউটার দিয়ে এঁকে দেখিয়েছি Fig 13-এ। এর উত্থানপতনের সঙ্গে $f'(x)$-এর চিহ্নের সম্পর্কটা দেখতে পাচ্ছ? ■

Example 5: The minimum value of $\cos\theta + \sin\theta + \frac{2}{\sin 2\theta}$ for $\theta \in (0, \pi/2)$ is

(A) $2 + \sqrt{2}$ (B) 2 (C) $1 + \sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

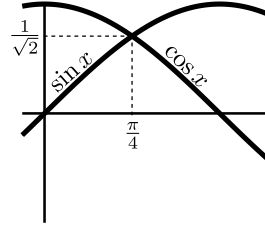



Fig 14

(JEE2015.34)
SOLUTION: ধরো $f(\theta) = \cos\theta + \sin\theta + \frac{2}{\sin 2\theta}$ নিলাম। পুরোটাকে $\sin\theta$ আর $\cos\theta$ দিয়ে লিখলে হয় $f(\theta) = \cos\theta + \sin\theta + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$. এ থেকে পাবে

$$f'(\theta) = -\sin\theta + \cos\theta - \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = (\sin\theta - \cos\theta)\left[\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} - 1\right].$$

এর মধ্যে চৌকো ব্র্যাকেটের মধ্যে যেটা রয়েছে সেটা সর্বদাই > 0, কারণ $\theta \in (0, \pi/2)$ হওয়ায় $\sin\theta$ আর $\cos\theta$ দুজনেই $(0, 1)$-এর মধ্যে, তাই

$$\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta} > 2.$$

এটা কী করে হল বুঝলে তো? $\sin\theta, \cos\theta$ দুজনেই $(0, 1)$-এর মধ্যে, তাই $\sin\theta\cos^2\theta$ আর $\sin^2\theta\cos\theta$-ও $(0, 1)$-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য। ফলে $\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}$ আর $\frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta}$ দুজনেই > 1 হতে বাধ্য।
সুতরাং পেয়ে যাচ্ছি $f'(\theta) \lesseqqgtr 0 \iff \sin\theta \lesseqqgtr \cos\theta$, মানে $\theta \lesseqqgtr \frac{\pi}{4}$. এটা গ্রাফ দিয়ে না ভাবলে বোঝা মুশকিল (Fig 14)। সুতরাং উত্তর হল $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cdots = 2 + \sqrt{2}$, মানে (A). ■

আমরা আগে differentiation ব্যবহার করে একটা জ্যামিতির অংক করেছি। সেই বাগানের অংকটা। সেখানে দেখেছিলাম যে, perimeter দেওয়া থাকলে সেই perimeter-ওয়ালা যাবতীয় rectangle-এর মধ্যে সবচেয়ে বেশী area হয় square-এর। এরকম আরেকটা অংক আছে, যেটা দিয়ে বার করা যায় আকাশ থেকে পড়ার সময়ে বৃষ্টির ফোঁটার আকার কীরকম হবে! তুমি হয়তো ভাবছ যে, আকারটা হয় মাদার ডেয়ারীর চিহ্নটার মত-- ◯. তা কিন্তু মোটেই হয় না। আকারটা হয় একেবারে নিটোল গোল। কারণ জলের surface tension-এর (মানে পৃষ্ঠটানের) জন্য ফোঁটাটার এমন আকার হয়, যাতে তার বাইরের তলটার area যথাসম্ভব কম হয়, মানে minimum হয়। ক্যালকুলাস দিয়ে দেখানো যায় যে, সেটা হবে একমাত্র তখনই যখন আকারটা গোল হবে। কিন্তু সেটা দেখানো আমাদের বইয়ের পাল্লার বাইরে। আমরা আপাততঃ একইরকম আরেকটা অংক দেখি, যেটা জলের ফোঁটার চাইতে সহজ হলেও একেবারে জলের মত সহজ নয়। অবশ্য এই অংকটা ক্যালকুলাস শেখার জন্য দরকারী কিছু নয়। তাই কঠিন লাগলে নিশ্চিন্তে বাদ দিয়ে যেতে পারো।

Example 6: Let $0 < a < b$.

(i) Show that amongst the triangles with base a and perimeter $a + b$ the maximum area is obtained when the other two sides have equal length $\frac{b}{2}$.
(ii) Using the result (i) or otherwise show that amongst the quadrilaterals of a given perimeter the square has maximum area.
(Bstat/Bmath2012long.6)
SOLUTION: বাগানের অংকটায় আমরা দেখেছিলাম যে, perimeter দেওয়া থাকলে যাবতীয় rectangle-এর মধ্যে সবচেয়ে বেশী area হয় square-এর। এবার দেখাব যে, rectangle নিয়ে শুরু করারও দরকার নেই, যাবতীয় quadrilateral (কোয়াড্রিল্যাটেরাল, মানে চতুর্ভুজ)-দের মধ্যেও সবচেয়ে বেশী area হয় square-এর। বুঝতেই পারছ এটা আরো বড়

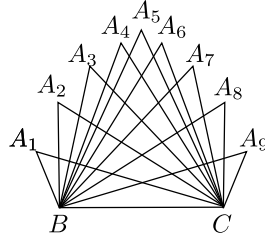



Fig 15

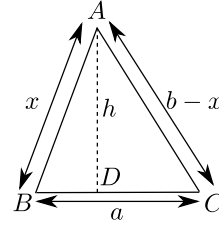



Fig 16

খবর--"মেরী কোম ভারতের সেরা মহিলা বক্সার"-এর চেয়ে যেমন আরো বড় খবর হল "মেরী কোম পৃথিবীর সেরা মহিলা বক্সার"!
অংকটা নিতান্ত সহজ নয়, তাই সুবিধার জন্য দুই ধাপে ভেঙে করতে বলেছে। প্রথম ধাপটা ত্রিভুজ নিয়ে। এমন ত্রিভুজ যার base-টা (ভূমিটা) বলা আছে a, আর perimeter বলা আছে $a+b$. এরকম অনেকগুলো ত্রিভুজ দেখিয়েছি Fig 15-এ, A_iBC-রা সকলেই এরকম ত্রিভুজ। এদের মধ্যে কার area সবচেয়ে বেশী বলে মনে হচ্ছে? যেহেতু সবারই base সমান, তাই area বেশী মানে height (উচ্চতা) বেশী, কারণ

$$\text{area} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}.$$

চোখের আন্দাজেই বোঝা যাচ্ছে যে, height সবচেয়ে বেশী হবে একেবারে মাঝের জনের (মানে A_5-এর) বেলায়। একেবারে মাঝে আছে, অর্থাৎ কিনা দুই দিকই সমান, তাই isosceles (সমদ্বিবাহু)। এই ব্যাপারটাই অংক কষে দেখাতে হবে।

✎(i) Let the triangle be as in Fig 16.

We are to maximise its area. Since the base is fixed, we shall maximise the height, h.

তার মানে আমাদের হাতে আছে x, আর সেটার value কমিয়ে বাড়িয়ে আমরা h-কে maximum করতে চাই। যদি h-কে x-এর function হিসেবে লিখে ফেলতে পারি, তবে খুব সুবিধা হবে। সেই চেষ্টা করা যাক--

✎By Pythagoras' theorem for triangles ABD and ADC,

$$\sqrt{x^2 - h^2} + \sqrt{(b-x)^2 - h^2} = a. \qquad (*)$$

হুম, এখানে থেকে h-কে আলাদা করে বার করে আনা দুঃসাধ্য বলে মনে হচ্ছে। অতএব implicit differentiation ছাড়া পথ নেই।

✎Differentiating w.r.t. x,

$$\frac{x - hh'}{\sqrt{x^2 - h^2}} + \frac{-(b-x) - hh'}{\sqrt{(b-x)^2 - h^2}} = 0.$$

এখানে $\frac{dh}{dx}$-কে আমরা h' লিখেছি। মিলিয়ে দেখে নিও, ঠিক করেছি কিনা।

✎Solving for h', we get

$$h' = \cdots = \frac{1}{h}\left(x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - h^2}\right).$$

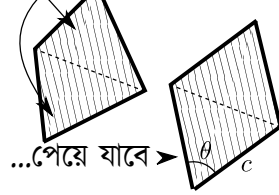



Fig 17 **Fig 18** **Fig 19** **Fig 20**

এখানে ওই ডট্ ডটের জায়গায় বেশ কয়েকটা ধাপ তোমায় করতে হবে। এর মধ্যে এক জায়গায় (*)-ও কাজে লাগবে। এবার আমরা দেখব কখন $h' \leq 0$ আর কখন $h' \geq 0$ হয়--

✎Since $h > 0$, hence

$$\begin{aligned} h' \lesseqqgtr 0 &\iff x \lesseqqgtr \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - h^2} \\ &\iff x^2 \lesseqqgtr \frac{b^2}{a^2}(x^2 - h^2) \quad [\because \text{both sides} > 0] \\ &\iff \cdots \\ &\iff \frac{b}{2} \lesseqqgtr x. \end{aligned}$$

Thus h is maximum when $x = \frac{b}{2}$, as required.

এবার অংকের আসল অংশ, যেখানে দেখাতে হবে যে, একই perimeter-ওয়ালা যাবতীয় quadrilateral-দের মধ্যে সবচেয়ে বেশী area হল square-এর। এখানে আমাদেরকে প্রায় পুরোটাই ছবির সাহায্যে এগোতে হবে।

✎(ii) We start with any quadrilateral with the given perimeter, and keep a diagonal fixed. If the diagonal is outside the quadrilateral, then we flip out one half. This does not change the perimeter, but increases the area.

কী করলাম সেটা Fig 17 দেখে বুঝে নাও।

✎Next we apply the result from part (i) to each triangular half to make them isosceles.

Fig 18 আর Fig 19 দ্যাখো, বুঝতে পারবে।

✎We repeat the procedure with the other diagonal to get a rhombus.

Fig 20 দ্যাখো। Rhombus-এর চারটে বাহুর দৈর্ঘ্যই সমান, নাম দিয়েছি c. আর কোণটার নাম দিয়েছি θ. এখানে c-র উপর আমাদের কোনো নিয়ন্ত্রণ নেই, কারণ perimeter বলে দেওয়া আছে। সুতরাং খালি θ নিয়ে খেলা করে area-কে maximum করতে হবে। তার জন্য area-টাকে θ-র একটা function হিসেবে লিখে নিতে পারলে সুবিধা হবে--

✎The area is $c^2 \sin\theta$.

area=base×height

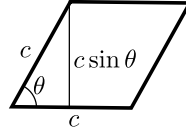



Fig 21

Rhombus-এর area-র এই ফর্মুলাটা মুখস্থ না থাকাই স্বাভাবিক, কিন্তু বার করে নেওয়া কঠিন নয়। Fig 21 দ্যাখো।

✎Clearly this is maximum when $\sin\theta$ is maximum, which occurs when $\theta = \frac{\pi}{2}$. Then the rhombus is a square, as required.

■

এই অংকটা পড়তে গিয়ে হাঁপ ধরে যেতেই পারে। চিন্তা কোরো না, এরকম জটিল জিনিস পরে আর কোথাও লাগবে না।

16.3 $f'(x) = 0$ কি হতেই হবে?

যদি $f(x)$-টা $x = a$-র আগে ওঠে ও পরে নামে (এবং $x = a$-তে কোনো ভাঙা না থাকে), তবে $x = a$-তে $f(x)$-টা maximum হতে বাধ্য। আগেই বলেছি যে, এর জন্য $f'(x)$-টা $x = 5$-এ defined হবার কোনো প্রয়োজন নেই। কিন্তু যদি $f'(0)$-টা defined হয়, তবে যে $f'(a) = 0$ হবেই সেটা ছবি থেকেই বুঝতে পারা যায়। একইভাবে, যদি $f(x)$-টা $x = b$-এর আগে নামে এবং পরে ওঠে (এবং $x = b$-তে কোনো ভাঙা না থাকে), তবে $x = b$-তে minimum থাকবে। এক্ষেত্রেও $f'(b)$ যদি defined হয়, তবে $f'(b) = 0$ না হয়ে যায় না।
এই ব্যাপারটাই কাজে লাগবে নীচের অংকটায়।

Example 7: If $y = a\log|x| + bx^2 + x$ has extreme values at $x = -1$ and $x = 2$, find the values of a and b.[2] **(HS2014.2fi)**
SOLUTION: সাধারণতঃ $|x|$-ওয়ালা অংককে $x < 0$, $x = 0$ আর $x > 0$ এই তিনটে কেসে ভেঙে নিলে সুবিধা হয়। এখানে অবশ্য $x = 0$ হলে চলবে না, কারণ তাহলে $\log|x|$-টা undefined হয়ে যাবে।

✎Here

$$f(x) = \begin{cases} a\log(-x) + bx^2 + x & \text{if } x < 0 \\ a\log x + bx^2 + x & \text{if } x > 0 \end{cases}.$$

So

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1, \quad x \neq 0.$$

এই জায়গাটায় সাবধান। লক্ষ করো $f(x)$-এর দুটো কেস থাকলেও $f'(x)$-এর বেলায় কেমন দুই ক্ষেত্রেই একই ফর্মুলা এসে গেল।

✎If $f(x)$ has extreme values at $x = -1$ and $x = 2$, then $f'(-1) = 0$ and $f'(2) = 0$.
Now $f'(-1) = -a - 2b + 1$ and $f'(2) = \frac{a}{2} + 4b + 1$.
$\therefore -a - 2b + 1 = 0$ and $\frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$.
Solving we get $a = 2$ and $b = -\frac{1}{2}$.

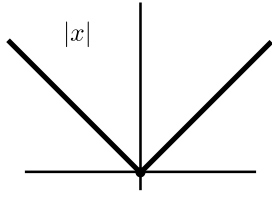



Fig 22

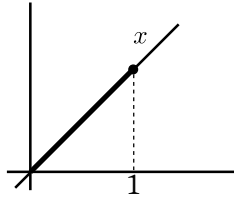



Fig 23

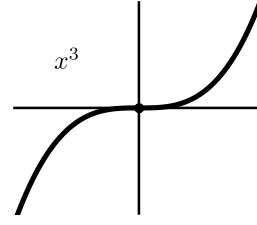



Fig 24

■

যখন কোনো $f(x)$-এর maximum বা minimum বার করতে হয়, তখন অনেক ছাত্রকেই দেখেছি $f'(x) = 0$ সমাধান করা নিয়ে ব্যস্ত হয়ে পড়ে। এই প্রসঙ্গে কয়েকটা সাবধানবানী দিয়ে রাখি--

- যদি $f(x)$-এর maximum বা minimum থাকে $x = a$-তে, এবং সেটা f-এর domain-এর একেবারে প্রান্তে না থাকে, এবং $f'(a)$-টা defined হয়, তবেই খালি জোর দিয়ে বলা যাবে $f'(a) = 0$.
- এমনটা খুবই সম্ভব যে, $f(x)$-এর maximum বা minimum কিছু একটা আছে $x = a$-তে, কিন্তু তাও $f'(a)$-টা defined-ই নয় (যেমন Fig 22-এ $f(x) = |x|$-এর বেলায় $x = 0$-তে), বা defined হলেও 0 নয়, (যেমন Fig 23-এ $[0, 1]$-এর উপরে $f(x) = x$-এর maximum হল $x = 1$-এ, কিন্তু $f'(1)$ মোটেই 0 নয়)।
- যদি কোথাও $f'(a) = 0$ হয়ও, তাও মোটেই জোর দিয়ে বলতে পারবে না $x = a$-তে maximum বা minimum আছে কিনা, যেমন Fig 24-এ $f(x) = x^3$-এর বেলায় $x = 0$-তে)।

এইসব কারণে $f'(x) = 0$ নিয়ে বেশী মাতামাতি না করে, $f'(x) \lesseqgtr 0$ নিয়ে চিন্তা করাই বেশী বুদ্ধিমানের কাজ।

DAY 17
Maximum বা minimum বার করা (part 2)

17.1 উত্থানপতনের আরো কাহিনী

কোনো function-এর maximum বা minimum বার করতে হলে তার গ্রাফটা জানা থাকলে খুবই সুবিধা হয়। কিন্তু যদি গ্রাফটার সব খুঁটিনাটি জানা নাও থাকে, খালি এটুকু জানা থাকে যে কোথায় উঠছে আর কোথায় নামছে, সেটুকু থেকেও maximum বা minimum বার করার প্রচুর সুবিধা হয়। এবং সেইখানেই differentiation-এর প্রয়োগ। এরকম কিছু উদাহরণ তো দেখেইছি। এবার আরো কিছু দেখব।

Example 8: Consider the function

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x - 1}, \quad 2 \leq x \leq 3.$$

Then

(A) maximum of f is attained inside the interval $(2, 3)$

(B) minimum of f is $28/5$.

(C) maximum of f is 28/5.

(D) f is a decreasing function in $(2, 3)$.

(Bstat/Bmath2012short.9)
SOLUTION:

এখানে $f(x)$-টা দেখতে একটা ভগ্নাংশের মত, যার উপরেও একটা polynomial আবার নীচেও একটা polynomial. এরকম ক্ষেত্রে সাধারণতঃ গোড়াতেই উপরের polynomial-টাকে নীচেরটা দিয়ে ভাগ করে ভাগফল আর ভাগশেষ আকারে লিখলে সুবিধা হয়। এইভাবে লিখলে পাবে

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline 2x-1 & 2x^2+3x+1 \\ & 2x^2-x \\ \hline & \quad 4x+1 \\ & \quad 4x-2 \\ \hline & \qquad 3 \end{array}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x-1}$$

এবং $f'(x) = 1 - \frac{6}{(2x-1)^2}$, যেটা $[2,3]$-এর উপরে সর্বদাই > 0. কেন, বোঝা গেল? কারণটা হল--

> x যখন $[2,3]$-এর মধ্যে, $2x$ তখন $[4,6]$-এর মধ্যে, তাই $2x-1$ থাকবে $[3,5]$-এর মধ্যে। সুতরাং $(2x-1)^2$ থাকবে $[9,25]$-এর মধ্যে, মানে সবসময়েই 6-এর থেকে বড়। তাই $\frac{6}{(2x-1)^2} < 1$ হবে।

সুতরাং গ্রাফটা উঠেই চলেছে। অতএব maximum-টা হবে একবারে ডানদিকের প্রান্তে গিয়ে, মানে $x = 3$-এ। লক্ষ করো যে $f(3) = \frac{28}{5}$. সুতরাং উত্তর হবে (C). ■

Example 9: Maximum value of the function $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ on the interval $[1, 6]$ is

(A) 1 (B) $\frac{9}{8}$ (C) $\frac{13}{12}$ (D) $\frac{17}{8}$

(JEE2012.13)
SOLUTION:

✎ $f'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2}{x^2} \lesseqgtr 0 \iff \frac{1}{8} \lesseqgtr \frac{2}{x^2} \iff x^2 \lesseqgtr 16 \iff |x| \lesseqgtr 4.$

তার মানে $x \in [1,4)$ হলে $f(x)$-টা নামছে, আর $x \in (4,6]$ হলে উঠছে। তার মানে ছবিটা হবে Fig 25-এর গ্রাফদুটোর কোনোটার মত।

✎ So the max occurs at either 1 or 6.

Fig 25

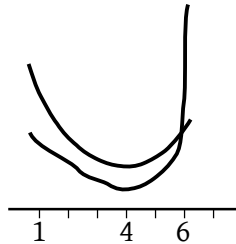
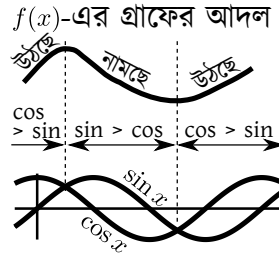



Fig 26

ব্যস্, differentiation-এর দৌড় এই পর্যন্তই। এবার $x = 1$ আর $x = 6$-এর মধ্যে কে জেতে, সেটা গায়ের জোরে পরীক্ষা করে দেখতে হবে। কষে ফেললেই দেখবে $f(1) = \frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$ আর $f(6) = \frac{6}{8} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$. এদের মধ্যে বড় হল $f(1)$. সুতরাং উত্তর হল (D). ■

Example 10: The minimum value of $2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ is

(A) $2^{1-1/\sqrt{2}}$ (B) $2^{1+1/\sqrt{2}}$ (C) $2^{1/\sqrt{2}}$ (D) 2

(JEE2014.64)

Solution: প্রথমে $2^{\sin x} + 2^{\cos x}$-কে একটা নাম দিই, ধরো $f(x)$. তাহলে

$$\begin{aligned} & f'(x) = \log 2 (2^{\sin x} \cos x - 2^{\cos x} \sin x) \lesseqgtr 0 \\ \iff\quad & 2^{\sin x} \cos x \lesseqgtr 2^{\cos x} \sin x \quad [\ \because \log 2 > 0] \\ \iff\quad & \frac{\cos x}{2^{\cos x}} \lesseqgtr \frac{\sin x}{2^{\sin x}}. \end{aligned}$$

একটা জিনিস দেখাই যাচ্ছে--যদি $\sin x = \cos x$ হয়, তবে $f'(x) = 0$ হবে। কিন্তু অন্য কোনো জায়গাতেও কি 0 হতে পারে? কোথায় < 0 হবে, আর কোথায়ই বা > 0 হবে? এসব প্রশ্নের সহজ কোনো উত্তর চোখে পড়ছে না। এখানে একটু কৌশল করব। এই function-টাকে দ্যাখো $g(t) = \frac{t}{2^t}$. আমরা এখানে $g(\sin x)$ আর $g(\cos x)$-এর মধ্যে তুলনা করছি। যেহেতু $\sin x, \cos x \in [-1, 1]$ হয়, তাই $[-1, 1]$-এর উপরে $g(t)$-র আচরণ জানলে সুবিধা হবে। $g'(t) = 2^{-t}(1 - t \log 2)$. এইটা > 0 হবে যদি $t < \frac{1}{\log 2}$ হয়, যেটা এখানে হচ্ছে (যেহেতু $t \leq 1$ এবং $\log 2 < 1$, কারণ $e > 2$)। সুতরাং $g(t)$ হল increasing. অতএব $g(\cos x) \lesseqgtr g(\sin x) \iff \cos x \lesseqgtr \sin x$. এবার $\sin x$ আর $\cos x$-এর গ্রাফ কল্পনা করলেই বুঝবে $f(x)$-এর ওঠানামা কীরকম (Fig 26)। মনে রেখো যে, $\sin x$ আর $\cos x$ ঢেউয়ের মত একই তালে ওঠানামা করেই চলেছে, তাই $f(x)$-টার যে আদলটা Fig 26-এ দেখিয়েছি সেটাও ঢেউয়ের মত বার বার হয়ে চলেছে। এখানে minimum হবে যখন নামার পরে ওঠা শুরু হবে, অর্থাৎ যখন $\sin x = \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হবে। তখন $f(x) = 2^{-1/\sqrt{2}} + 2^{-1/\sqrt{2}} = 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$. তাই উত্তর হল (A). ■

17.2 Transformation

অনেক সময়ে আমাদের এমন কোনো $f(x)$-এর maximum বা minimum বার করতে হয়, যেটা সরাসরি differentiate করার পক্ষে বড্ড জটিল, কিন্তু যেখানে x-টা সর্বদাই কোনো একটা বিশেষ আকারে রয়েছে। যেমন ধরো $f(x) = 2 + 3e^x - \cos(e^x)$, $(x \in \mathbb{R})$. লক্ষ করো, যেখানেই x আছে সেখানেই e^x আকারে আছে। এরকম ক্ষেত্রে $t = e^x$ ধরে নিলে আমরা $f(x)$-কে t দিয়ে লিখতে পারি $2 + 3t - \cos(t)$. একে যদি $g(t)$ বলি, তবে $f(x)$-এর maximum বা minimum বার করা হল $g(t)$-র maximum বা minimum বার করা। যেহেতু $g(t)$-টা $f(x)$-এর চেয়ে অনেক সহজ

দেখতে হয়, তাই ওকে নিয়ে কাজ করাটা সহজতর। তবে একটা ব্যাপারে সাবধান--গোড়াতে $x \in \mathbb{R}$ ছিল, কিন্তু যেই $t = e^x$ নিলে, তখন t কিন্তু খালি $(0, \infty)$-র মধ্যে value নিতে পারবে, অতএব $g(t)$-র maximum বা minimum যাই বার করো না কেন, সেটা যেন $t \in (0, \infty)$-র জন্য হয়!

Example 11: The maximum and minimum values of $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta$ are, respectively,

(A) 1 and $\frac{1}{4}$ (B) 1 and 0 (C) 2 and 0 (D) 1 and $\frac{1}{2}$

(JEE2013.23)
SOLUTION: এখানে কাজ হচ্ছে $f(\theta) = \cos^6 \theta + \sin^6 \theta$-কে নিয়ে। আমরা জানি যে $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$. তাই পুরো জিনিসটাকেই $\sin^2 \theta$ দিয়ে লেখা যায়। সুতরাং $t = \sin^2 \theta$. নেব। তাহলে $f(\theta) = g(t)$ যেখানে $g(t) = (1-t)^3 + t^3 = 1 - 3t + 3t^2$. মনে রেখো যে $t \in [0, 1]$. এবার তাহলে আমাদের differentiation-এর কায়দাটা $g(t)$-র উপরে লাগাব। $g'(t) = -3 + 6t = 3(2t-1) \lesseqqgtr 0$ যখন $t \lesseqqgtr \frac{1}{2}$. সুতরাং বুঝতেই পারছ যে, g-এর minimum হচ্ছে $t = \frac{1}{2}$-এ আর maximum হচ্ছে দুই প্রান্তের কোনো একটাকে, অর্থাৎ $t = 0$-তে অথবা $t = 1$-এ। সরাসরি $g(0)$ আর $g(1)$ বার করলে দেখবে দুটোই 1 হচ্ছে। তার মানে দুই জায়গাতেই maximum পাওয়া যাচ্ছে। Minimum-টা হল $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ আর maximum-টা হল $g(0) = 1$.
সুতরাং উত্তর হচ্ছে (A). ■

Exercise 2: The minimum value of $f(\theta) = 9\cos^2 \theta + 16 \sec^2 \theta$ is

(A) 25 (B) 24 (C) 20 (D) 16.

(BStat/BMath2013Short.21)
HINT: এখানে $t = \cos^2 \theta$ নিলেই কাজ হবে। খালি একটা ব্যাপারে সাবধান, এখানে কিন্তু $t \in (0, 1]$ কেন $t = 0$ হতে পারে না, বলো তো! বাকিটা নিজে করো। ■

আরেকটা একই রকম অংক। তবে এবার maximum বা minimum বার করতে বলে নি, কোথায় maximum বা minimum হবে, সেটা বার করতে বলেছে।

Exercise 3: Let $f(x) = \sin x + 2\cos^2 x$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. Then f attains its

(A) minimum at $x = \frac{\pi}{4}$

(B) maximum at $x = \frac{\pi}{2}$

(C) minimum at $x = \frac{\pi}{2}$

(D) maximum at $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

(JEE2013.45)
HINT:
এখানে $f(x)$-কে $\sin x$ দিয়ে লেখা যাবে (যেহেতু $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)। তাই $t = \sin x$ নেব। তাহলে $f(x)$ হয়ে যাবে $t + 2(1-t^2) = -2t^2 + t + 2$, যেখানে $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. এই শেষের শর্তটা কোথা থেকে এল সেটা বুঝতে পারবে Fig 27 দেখলেই।
এবার differentiation-এর কায়দা লাগালেই দেখবে যে, minimum হচ্ছে $t = 1$-এ, আর maximum হচ্ছে $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$-এ। আমাদের উত্তর দিতে হবে x দিয়ে। Fig 27-এর দিকে আরেকবার তাকালেই উত্তরটা পেয়ে যাবে। ■

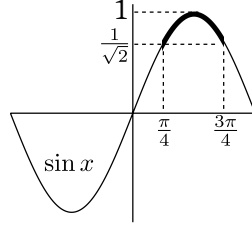



Fig 27

Example 12: Let $x, y \in (-2, 2)$ and $xy = -1$. Then the minimum value of

$$\frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-y^2}$$

is

(A) 8/5 (B) 12/5 (C) 12/7 (D) 15/7.

(Bstat/Bmath2012short.18)
SOLUTION: এখানে প্রথম সমস্যা হল x আর y দুটো variable আছে। কিন্তু যেহেতু $xy = -1$ বলেই দিয়েছে, তাই y-এর জায়গায় $-\frac{1}{x}$ লিখলেই সে সমস্যা মিটে যাবে। অবশ্য x দিয়ে ভাগ করার আগে $x \neq 0$ হওয়ার গ্যারান্টি চাই। কিন্তু সে গ্যারান্টি আছেই, কারণ $x = 0$ হলে তো আর $xy = -1$ হতে পারত না!
তাহলে $\frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-y^2}$ হয়ে যাবে

$$\frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-\frac{1}{x^2}}. \qquad (*)$$

জিনিসটা খুব একটা উপাদেয় ঠেকছে না। কিন্তু লক্ষ করো যে, এখানে x সর্বদাই x^2 আকারে রয়েছে। তাই x^2-কে একটা নতুন নাম দাও, ধরো t. দেখা যাক (*)-কে t দিয়ে লিখলে কীরকম হয়--

$$\frac{4}{4-t} + \frac{9}{9-\frac{1}{t}} = \cdots = \frac{4}{4-t} + \frac{1}{9t-1} + 1.$$

ধরো এর নাম দিলাম $f(t)$. এখানে ভালো করে বুঝতে হবে t কী কী value নিতে পারে।

- $x \in (-2, 2)$ বলেছিল, তাই $t \in [0, 4)$ দরকার।
- আবার $y \in (-2, 2)$ বলা ছিল, তাই $\frac{1}{t} \in [0, 4)$ হতে হবে, মানে $t \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$.

সুতরাং দুটো শর্ত মিলিয়ে দাঁড়ালো $t \in \left(\frac{1}{4}, 4\right)$.
এবার $f(t)$-কে differentiate করে দিলে হবে

$$f'(t) = \frac{4}{(4-t)^2} - \frac{9}{(9t-1)^2}.$$

খানিকটা দলাইমলাই করলেই দেখবে $f'(t) \lesseqqgtr 0 \iff t \lesseqqgtr \frac{2}{3}$. সুতরাং $f(t)$-র minimum হবে $t = \frac{2}{3}$-এ। এবার $f\left(\frac{2}{3}\right)$ বার করলেই উত্তর বেরোবে (B). ■

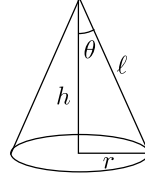



Fig 28

- Fig 28-এ যে cone-টা (শংকু) রয়েছে, তার বাইরের তলের মোট area কত, এবং cone-টার volume (আয়তন) কত?
- $a < b$ দুটো সংখ্যা হলে $a^2 < b^2$ কি হবেই? আর যদি $a, b > 0$ বলে দেওয়া থাকে, তবে?
- যদি $f(x)$ সর্বদাই > 0 হয়, এবং $x = a$-তে $f(x)$-এর maximum থাকে, তবে $\big(f(x)\big)^2$-এর maximum কোথায় থাকবে?

Example 13: The total surface area of a right circular cone is given. Show that the volume of that cone will be maximum if the semivertical angle is $\sin^{-1}\frac{1}{3}$.[5] **(HS2015.3biv)**

SOLUTION: অংকটা বোঝার জন্য Fig 28 দেখে নাও। এখানে semivertical angle-টা θ ধরে volume-টাকে θ-র function হিসেবে প্রকাশ করে নিলে সুবিধা হবে। তারপর সেই function-এর maximum কখন হয়, সেটা দেখতে হবে।

✎Let the cone be as shown in Fig 28.

এখানে r, ℓ, h আর θ এই চারটে variable-কে বয়ে বেড়াবার কোনো মানে হয় না। আমরা খালি θ-কে রাখব (কারণ প্রশ্নটা θ নিয়েই), বাকিদেরকে θ দিয়ে প্রকাশ করার চেষ্টা করব।

✎Then $r = \ell\sin\theta$ and $h = \ell\cos\theta$.

r এবং h-কে ℓ আর θ দিয়ে লেখা গেছে। এবার ℓ-কে θ দিয়ে প্রকাশ করতে পারলেই হয়। আমাদের বলে দিয়েছে যে, মোট surface area-টা constant. সুতরাং θ এবং ℓ-এর মধ্যে একটা সম্পর্ক পাওয়া যাবে তা থেকে।

✎So the total surface area is

$$\pi r\ell + \pi r^2 = \pi\ell^2(\sin\theta + \sin^2\theta) = C, \text{ say.}$$

Hence $\ell = \left(\frac{C}{\pi(\sin\theta+\sin^2\theta)}\right)^{1/2}$, $(\because \ell > 0)$.

এইরকম একটা জিনিসই আমরা চাইছিলাম। সুতরাং এখন r, ℓ, h এই তিনজনকেই θ দিয়ে প্রকাশ করা যাবে। এবার তাহলে volume-টাকে θ-র function হিসেবে লেখার চেষ্টা করি--

✎We are to maximise the volume

$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi \ell^3 \sin^2\theta\cos\theta = \tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{C}{\pi(\sin\theta+\sin^2\theta)}\right)^{3/2}\sin^2\theta\cos\theta,$$

or, equivalently, to maximise

$$\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{\sin^{1/2}\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)^{3/2}}.$$

এইটা পেলাম $\frac{\pi C^{3/2}}{3}$-কে বাদ দিয়ে। যেহেতু এটা একটা positive constant, তাই এটা বাদ দিয়ে maximum বার করলেও একই উত্তর পাওয়া যাবে।
পুরো জিনিসটাকে দাঁতে দাঁত চেপে differentiate করে অংকটা করে ফেলা যায়। কিন্তু একটা কৌশল করলে কাজটা সামান্য সহজে হবে। লক্ষ করো এখানে square root-এর বড্ড ছড়াছড়ি, তাই square করে নিতে পারলে সুবিধা হয়।

✎Since this is positive, so enough to maximise its square

$$\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^3} = f(\theta), \text{ say.}$$

এখানে একটা বোনাস পাওয়া যাচ্ছে! যেহেতু $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$, তাই পুরো জিনিসটাকেই $\sin\theta$ দিয়ে লেখা যায়। তাই $s=\sin\theta$ নিলে সুবিধা হবে।

✎This is the same as $f(s) = \frac{s(1-s^2)}{(1+s)^3}$, where $s=\sin\theta\in(0,1)$.

Then $f'(s) = \frac{(1-3s^2)(1+s)^3-3s(1-s^2)(1+s)^2}{(1+s)^6}$.

এবার $f'(s) \lesseqqgtr 0$ নিয়ে মাথা ঘামাতে হবে। তার জন্য নীচের তলার $(1+s)^6$-এর কোনো ভূমিকা নেই, কারণ ওটা সব সময়েই >0.

✎So

$$\begin{aligned} f'(s)\lesseqqgtr 0 &\iff (1-3s^2)(1+s)^3-3s(1-s^2)(1+s)^2 \lesseqqgtr 0\\ &\iff (1-3s^2)-3s(1-s)\lesseqqgtr 0\\ &\iff 1-3s\lesseqqgtr 0\\ &\iff \tfrac{1}{3}\lesseqqgtr s. \end{aligned}$$

Thus $f(s)$ has its maximum when $s=\frac{1}{3}$, ie, when $\theta=\sin^{-1}\frac{1}{3}$, as required $\because \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

■

17.3 Second derivative ব্যবহার করা

কোনো $f(x)$-এর জন্য $f'(x)\lesseqqgtr 0$ পরীক্ষা করে extremum বার করার যে কায়দাটা শিখেছি, সেটা সহজে কাজ করে যদি গ্রাফটাতে বেশী ঢেউ না থাকে, যেমন ধরো একটাই চূড়া বা একটাই খাদ, এরকম। কিন্তু যদি অনেক ওঠানামা থাকে, তবে

Fig 29

উল্টো বাটি

সোজা বাটি

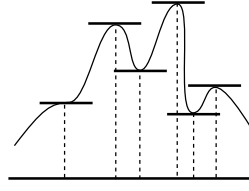
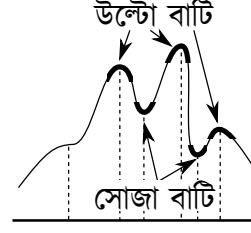



Fig 30

এই পদ্ধতিতে মাথা গুলিয়ে যাবার সম্ভাবনা থাকে। এরকম ক্ষেত্রে second derivative ব্যবহার করে আরেকটা কায়দা আছে, যেটা এবার শিখব। বোঝানোর সুবিধার জন্য প্রথমে ধরে নেব যে $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ এমন একটা function, যাকে সর্বত্র দুবার differentiate করা যায়। অতএব খোঁচ ভাঙা ইত্যাদি সমস্যা নেই। এরকম $f(x)$-এর maximum বা minimum বার করার জন্য এবার একটা নতুন কায়দা বলছি--

- প্রথমে দ্যাখো x-এর কোন কোন value-তে $f'(x)=0$ হচ্ছে। Maximum বা minimum যা যা হবে, সবই x-এর এই কয়টা value-তেই সীমাবদ্ধ থাকবে। Fig 29 দ্যাখো। এখানে এই value-গুলোকে ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন দিয়ে দেখিয়েছি।

- এইবার এইসব value-তে $f''(x)$ বার করো।

- যেখানে $f''(x)<0$ হবে, সেখানে জানবে গ্রাফটা ওল্টানো বাটির মত হবে, তাই local maximum হবে। আর যেসব জায়গায় $f''(x)>0$ হবে, সেখানে গ্রাফটা হবে সোজা বাটির মত, তাই local minimum হবে। Fig 30 দেখে নাও।

- যদি $f''(x)>0$ হয়, তবে কী সিদ্ধান্ত করতে হবে শিখলাম, $f''(x)<0$ হলেও শিখেছি। কিন্তু যদি $f''(x)=0$ হয় তবেই সমস্যা, কারণ সেক্ষেত্রে কিছুই বলা যায় না, local maximum-ও হতে পারে, local minimum-ও হতে পারে, বা ওখানে একটা টুইস্টের মতও থাকতে পারে, যেমন $y=x^3$-এর গ্রাফে $x=0$-তে আছে। অংকের ভাষায় এরকম টুইস্টের জায়গাকে বলে **point of inflection**.

বসে যদি ডাইনে,-- লেখে মোর আইনে--
এই ল্যাজে মাছি মারি ত্রস্ত
বামে যদি বসে তাও নহি আমি পিছপাও
এই ল্যাজে আছে তার অস্ত্র!
যদি দেখি কোনো পাজি বসে ঠিক মাঝামাঝি
কি করি যে ভেবে নাহি পাই রে--
ভেবে দেখ একি দায় কোন ল্যাজে মারি তায়
দুটি বই ল্যাজ মোর নাই রে!

--সুকুমার রায়

এই কায়দাটার একটা অংক করি।

Example 14: $f(x)=3x^4-20x^3+36x^2+1$-এর যাবতীয় local maximum আর local minimum বার করো।

SOLUTION: $f'(x)=12x^3-60x^2+72x=12x(x-2)(x-3)$. সুতরাং $f'(x)=0$ হবে $x=0,2$ আর 3-এ। এবার $f''(x)=36x^2-120x+72$. সুতরাং

1. $f''(0)=72>0$ তাই ওখানে local minimum.

2. $f''(2)=-24<0$ তাই ওখানে local maximum.

3. $f''(3)=36>0$ তাই ওখানে local minimum.

■

এবার একটা ছোট্টো গুগ্‌লি দিই--

Exercise 4: আবার ওই আগের অংকের $f(x)$-টাই নাও। বলো তো ওর global maximum কী হবে?
HINT: গ্রাফ দিয়ে ভাবো! ■

আমরা দুটো কায়দা শিখেছি maximum আর minimum বার করার জন্য--

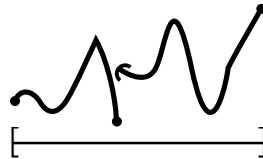
- এক, গতকালের কায়দাটা, মানে $f'(x)$ বার করে দেখা কোথায় $f'(x) > 0$ হচ্ছে, আর কোথায় $f'(x) < 0$ হচ্ছে।
- দুই, প্রথমে দেখা কোথায় $f'(x) = 0$ হচ্ছে, এবং সেইসব জায়গায় $f''(x)$-টা > 0 বা < 0 হচ্ছে কিনা।

এই দুটো পদ্ধতির মধ্যে অনেক ছাত্রছাত্রীকেই দেখি দ্বিতীয়টার অন্ধ ভক্ত। এমনকি প্রথম পদ্ধতিটা হয়তো জানেই না! কিন্তু প্রথম পদ্ধতিটার বেশ কয়েকটা সুবিধা আছে যেগুলো দ্বিতীয়টার নেই--

- প্রথম পদ্ধতিতে একবার differentiate করলেই চলে, তাই ঝকমারি অনেক কম।
- দ্বিতীয় পদ্ধতিতে খালি local maximum বা local minimum অব্‌ধি পাওয়া যায়, global maximum বা global minimum বার করার জন্য local-দের মধ্যে ধরে ধরে খুঁজতে হয়, এবং যদি global maximum বা minimum না থাকে সেটা বোঝার কোনো পথ থাকে না (যেমন উপরের গুগ্‌লি অংকটাতে)। কিন্তু প্রথম পদ্ধতিতে global maximum বা global minimum বার করা, বা না থাকলে সেটা টের পাওয়া সহজতর।

এবার স্বভাবতঃই প্রশ্ন জাগে--একটা অংক পেলে কোন পদ্ধতিতে এগোব? উত্তর হল, দুটো পথই খোলা রাখা ভালো--দুটো পদ্ধতিতেই $f'(x)$ বার করে শুরু করতে হয়। সুতরাং শুরুতে একবার differentiate করো। দ্বিতীয় পদ্ধতিতে $f'(x) = 0$ সমাধান করতে হয়, সেই সময়ে একইসঙ্গে $f'(x) \lesseqgtr 0$-ও বার করে ফেলার চেষ্টা করা উচিত। যদি করা গেল তো প্রথম পদ্ধতিতেই কেল্লা ফতে। নেহাত যদি সেটা জটিল লাগে, তখন দ্বিতীয় পদ্ধতিতে এগোলেই হবে!
এতক্ষণ আমরা ধরে নিচ্ছিলাম যে, $f(x)$-এর কোথাও কোনো ভাঙা বা খোঁচ নেই। যদি সে সব সমস্যা থাকে, তবে জটিলতা বাড়বে, যদিও মূল ধারণাটা একই থাকবে। একটা ছবির উদাহরণ দিয়ে বুঝে নিই।

Example 15: ধরো Fig 31-এর মত একটা $f(x)$-এর maximum আর minimum বার করতে হবে। অবশ্যই, যদি গ্রাফটা জানা থাকে তবে উত্তর বার করা মুহূর্তের ব্যাপার। কিন্তু যদি খালি ফর্মুলা দেওয়া থাকে, তবে?
SOLUTION: প্রথমেই দেখতে হবে ভাঙাগুলো কোথায় কোথায় আছে। সেই অনুযায়ী কয়েকটা টুকরো পাবে, যেমন আমাদের বেলায় দুটো টুকরো আছে। এবার প্রতিটা টুকরোকে আলাদা করে দ্যাখো, মানে differentiate করে ওঠা নামা বার করো (বা দরকার হলে second derivative অবধি যাও)। প্রতিটা টুকরোর প্রান্তগুলোর কথাও মাথায় রেখো, ওই জায়গাগুলোতে $f(x)$-এর value পরীক্ষা করে দেখতে হবে। কোনো খোঁচ থাকলে, সেখানেও $f(x)$-এর value-টা দেখা দরকার। এইভাবে প্রতিটা টুকরোর সর্বোচ্চ বিন্দুদের মধ্যে যে সবচেয়ে উঁচু, সেই হবে global maximum. একইভাবে সবচেয়ে নীচের বিন্দুগুলো

Fig 31

থেকে global minimum বার করা যাবে। ■

লক্ষ করো এইখানে কোনো পরীক্ষার অংক দিই নি। আসলে এমন কোনো পরীক্ষার অংক চোখেই পড়ে নি, যেখানে এত কষ্ট করতে হয়। ওরা সবাই প্রথম পদ্ধতিতেই ঘায়েল হয়ে যায়।

DAY 18
Maximum বা minimum বার করা (part 3)

18.1 খালি integer-দের function

আমরা এতক্ষণ পর্যন্ত এমন সব function-দের নিয়ে কাজ করছিলাম, যাদের domain হল কোনো interval. যদি কোনো function খালি integer-দের জন্যই defined হয়, তবে ব্যাপারটা একটু অন্যরকম হয়। এবার সেরকম কিছু উদাহরণ দেখি।

Example 16: ধরো $f(n) = (2n-11)^2$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$. এর minimum বার করো।

SOLUTION: যদি f-এর ফর্মুলায় $n \in \mathbb{Z}$-এর জায়গায় $x \in \mathbb{R}$ বসিয়ে নিতাম, তবে পেতাম $(2x-11)^2$, $x \in \mathbb{R}$. এটা একটা দুহাত উপরে তোলা parabola (Fig 32), যার minimum-টা হয় $x = \frac{11}{2} = 5.5$-এ। সমস্যা হল 5.5 মোটেই integer নয়, তাই এমনটা বলা যাচ্ছে না যে, "$f(n)$-টা $n = \frac{11}{2}$-তে minimum হয়।" আসলে $(2x-11)^2$-এর গ্রাফটা Fig 32-এর মত একটানা একটা curve হলেও $f(n)$-এর গ্রাফটা হবে Fig 33-এর মত পর পর ডট্ ডট্ দিয়ে তৈরী। এখানে চোখে দেখে বোঝা যাচ্ছে যে, $f(n)$-টা minimum হবে দু জায়গায়, $n = 5$-এ আর $n = 6$-এ। ■

এই অংকে $x \in \mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করলে উত্তর হচ্ছিল $x = 5.5$ আর $n \in \mathbb{Z}$ নিয়ে কাজ করলে উত্তর হল $n = 5$ আর $n = 6$. এখানে 5 আর 6 হল 5.5-এর সবচেয়ে কাছাকাছি দুটো integer. এমনটা কিন্তু সব সময়ে নাও হতে পারে। ছবি দিয়ে এরকম একটা উদাহরণ দিয়েছি Fig 34-এ। কিন্তু তাও অনেক সময়েই $f(n)$-এর extremum বার করার জন্য $f(x)$-এর আচরণটা প্রথমে দেখে নিলে সুবিধা হয়। নীচের অংকটা এরকমই একটা উদাহরণ।

Example 17: Find the maximum among $1, 2^{1/2}, 3^{1/3}, 4^{1/4}, \ldots$. **(BStat2015.10)**

SOLUTION: মনে আছে নিশ্চয়ই যে, $a > 0$ হলে a^b মানে আসলে $\exp(b \log a)$. এখানে সেটা কাজে লাগবে।

✎Let $f(x) = x^{1/x}$ for $x > 0$. Then

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

So, by chain rule,

$$f'(x) = \exp\left(\frac{\log x}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{x}\right) = x^{1/x} \times \frac{\frac{1}{x} \times x - \log x}{x^2} = x^{1/x} \times \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

Fig 32

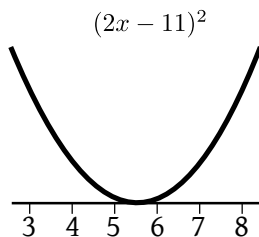



Fig 33

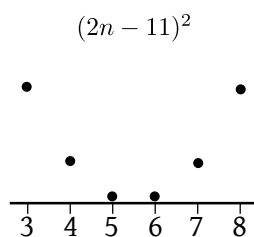
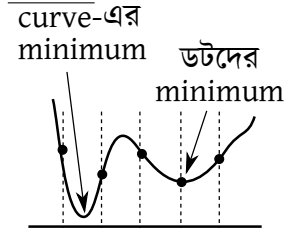



Fig 34

Hence

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}x^{1/x} \lesseqqgtr 0 \\ \iff & 1-\log x \lesseqqgtr 0 \quad \left[\because \frac{x^{1/x}}{x^2}>0\right] \\ \iff & 1 \lesseqqgtr \log x \\ \iff & e \lesseqqgtr x \quad \left[\because e^x \text{ is increasing}\right] \end{aligned}$$

Thus, $f(x)$ is increasing for $x<e$ and decreasing for $x>e$.

Since $e \in (2,3)$, hence $f(1)<f(2)$ and $f(3)>f(4)>\cdots$.

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, $f(1)$ বা $f(4), f(5), \ldots$ ইত্যাদিরা কেউ maximum হতে পারে না। এবার তাহলে লড়াই $f(2)$ আর $f(3)$-এর মধ্যে। এদেরকে সরাসরি তুলনা করে দেখি।

✎Now

$$f(2) \lesseqqgtr f(3) \iff 2^{1/2} \lesseqqgtr 3^{1/3}$$

উপরতলার $\frac{1}{2}$ আর $\frac{1}{3}$ দুটো বেশ বিরক্তিকর।
যেহেতু 2 আর 3-এর LCM (লসাগু) হল 6, তাই
দুজনকেই 6-th power-এ তুললে সুবিধা হবে।

$$\iff \left(2^{1/2}\right)^6 \lesseqqgtr \left(3^{1/3}\right)^6$$

$$\iff 2^3 \lesseqqgtr 3^2 \iff 8 \lesseqqgtr 9.$$

So $f(2)<f(3)$. Hence $f(n)$ attains its maximum at $n=3$. So the required maximum is $3^{1/3}$.

■

এবার এই অংকটা খুবই সহজ হওয়া উচিত।

Exercise 5: Let $\exp(x)$ denote the exponential function e^x. If $f(x)=\exp\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$, $x>0$, then the minimum value of f in the interval $[2,5]$ is

(A) $\exp\left(e^{\frac{1}{e}}\right)$ (B) $\exp\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$ (C) $\exp\left(5^{\frac{1}{5}}\right)$ (D) $\exp\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$

(JEE2013.30)
HINT: যেহেতু e^x একটা increasing function, তাই খালি $x^{1/x}$-এর minimum দেখলেই হবে। সাবধান, এখানে কিন্তু minimum চেয়েছে, maximum নয়! ■

18.2 কিছু প্যাঁচের অংক

এবার কিছু বিচ্ছিরি মতন অংক দেখব। পরীক্ষাপাশের জুজু না থাকলে এগুলো খালি হাল্কাভাবে চোখ বুলিয়ে ছেড়ে দিতে পারো।

- যদি $u = \sin x + \cos x$ হয়, তবে $\sin x \cos x$-কে u দিয়ে লেখো।
- এমন দুটো সংখ্যা A আর ϕ বার করো, যাতে $\sin x + \cos x = A\sin(x+\phi)$ হয়।

Example 18: The minimum value of $|\sin x + \cos x + \tan x + \operatorname{cosec} x + \sec x + \cot x|$ is

(A) 0 (B) $2\sqrt{2}-1$ (C) $2\sqrt{2}+1$ (D) 6.

(BStat/BMathMCQ.27)

SOLUTION: এই অংকটা নিয়ে অনেকক্ষণ খাবি খাওয়া অসম্ভব নয়। প্রথমে সব কিছুকে $\sin x$ আর $\cos x$ দিয়ে লেখো--

$$\begin{aligned} & \sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\ = \quad & \sin x + \cos x + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \\ = \quad & \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x}. \end{aligned}$$

এবার লক্ষ করো যে, $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$. তাই $u = \sin x + \cos x$ ধরলে $\sin x \cos x = \frac{u^2-1}{2}$. সুতরাং পুরো জিনিসটাকে u দিয়ে লেখা যাচ্ছে এইভাবে--

$$u + \frac{2(u+1)}{u^2-1}. \qquad (*)$$

এইভাবে যে পুরোটাকে u দিয়ে লিখে ফেলা যায়, সেটা মাথায় না এলে অংকটা করা দুষ্কর[2]। এবার দেখা দরকার u কী কী value নিতে পারে। $u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. তাই $u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. এদিকে এক জায়গায় $u^2 - 1$ দিয়ে ভাগ আছে, তাই $u \neq \pm 1$ চাই। সুতরাং দাঁড়ালো $u \in [-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$. এবার (*)-কে একটু কাটাকাটি করলে হয়

$$u + \frac{2}{u-1}.$$

একে নাম দিই $f(u)$. যেহেতু আমাদের কাজ করতে হবে এর absolute value নিয়ে, তাই চট্ করে দেখে নিই, এটা কখন > 0 আর কখন < 0 হয়। একটা টেবিল করে নিলে সুবিধা হবে--

Interval	u	$\frac{2}{u-1}$	$f(u)$
$[-\sqrt{2}, -1)$	< 0	< 0	< 0
$(-1, 0)$	< 0	< 0	< 0
$[0, 1)$	≥ 0	< 0	?
$(1, \sqrt{2}]$	> 0	> 0	> 0

[2]বলতে লজ্জা নেই যে, আমি এটা নিজে ভেবে বার করতে পারিনি, একজন মাষ্টারমশায় এটা বলে না দিলে মুস্কিলে পড়ে যেতাম।

এখানে একটু মাথা ঘামাতে হবে $[0,1)$ কেসটা নিয়ে--

$$u \in [0,1) \iff u-1 \in [-1,0) \iff \frac{1}{u-1} \in (-\infty,-1] \iff \frac{2}{u-1} \in (-\infty,-2].$$

এদিকে $u \in [0,1)$. সুতরাং $f(u) < 0$. আমাদের কাজ করতে বলেছে $|f(u)|$ নিয়ে। সেটা হল

$$|f(u)| = \begin{cases} -f(u) & \text{if } u \in [-\sqrt{2},-1) \\ -f(u) & \text{if } u \in (-1,1) \\ f(u) & \text{if } u \in (1,\sqrt{2}] \end{cases}.$$

এবার differentiate করব। লক্ষ করো--

$$f'(u) = 1 - \frac{2}{(u-1)^2}.$$

এর derivative হবে--

$$\tfrac{d}{du}|f(u)| = \begin{cases} -f'(u) & \text{if } u \in [-\sqrt{2},-1) \\ -f'(u) & \text{if } u \in (-1,1) \\ f'(u) & \text{if } u \in (1,\sqrt{2}] \end{cases}.$$

এদিকে

$$\begin{aligned} & f'(u) \lesseqgtr 0 \\ \iff \quad & 1 \lesseqgtr \frac{2}{(u-1)^2} \\ \iff \quad & (u-1)^2 \lesseqgtr 2 \\ \iff \quad & |u-1| \lesseqgtr \sqrt{2}. \end{aligned}$$

সুতরাং

$$\tfrac{d}{du}|f(u)| = \begin{cases} <0 & \text{if } u \in [-\sqrt{2},-1) \\ <0 & \text{if } u \in (-1,1-\sqrt{2}) \\ 0 & \text{if } u = 1-\sqrt{2} \\ >0 & \text{if } u \in (1-\sqrt{2},1) \\ <0 & \text{if } u \in (1,\sqrt{2}) \end{cases}$$

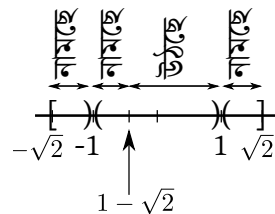
অতএব উত্থানপতনের চিত্রটা হবে Fig 35-এর মত। তাই minimum থাকতে পারে খালি $1-\sqrt{2}$ আর $\sqrt{2}$-এ। এই দুই জায়গায় function-টার value বার করে তুলনা করলেই দেখবে যে, উত্তর হচ্ছে (B). ■

Example 19: Show that the function $f(x)$ defined below attains a unique minimum for $x > 0$.

Fig 35

নামছে নামছে উঠছে নামছে

$-\sqrt{2}$ -1 1 $\sqrt{2}$

$1-\sqrt{2}$

What is the minimum value of the function? What is the value of x at which the minimum is attained?

$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0.$$

Sketch on plain paper the graph of this function. **(BStat2015.6)**

SOLUTION: এই অংকটা করার একটা কায়দা হল $f(x)$-কে differentiate করে $f'(x)$ বার করা, এবং দেখা কোথায় $f'(x) = 0$ হয়। সমস্যা হল $f'(x)$-টা বেশ বড় একটা জিনিস, এবং $f'(x) = 0$ সমাধান করা সহজ নয়। কিন্তু এক্ষেত্রে একটা সহজ কায়দাও সম্ভব। লক্ষ করো, $f(x)$-এর মধ্যে একটা সুন্দর ভারসাম্য আছে, এর মধ্যে যেমন x আছে তেমনি $\frac{1}{x}$-ও আছে, আবার x^2 যেমন আছে, তেমনি $\frac{1}{x^2}$-ও আছে। অর্থাৎ ওর ভিতরে যে চারটে term আছে, তাদের বেশ জোড়ায় জোড়ায় সাজিয়ে ফেলা যায়--

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

এর ফলে $f(x)$-ও যা, $f\left(\frac{1}{x}\right)$-ও তাই। সুতরাং যদি বলি $f(2)$ হচ্ছে $f(x)$-এর minimum, তবে $f\left(\frac{1}{2}\right)$-ও minimum হতে বাধ্য। অতএব অংকটার প্রথম অংশটা যদি একবার করে ফেলতে পারি (মানে যদি দেখাতে পারি যে, $x > 0$-র জন্য $f(x)$ খালি এক জায়গাতেই minimum হয়) তবে জোর দিয়ে বলতে পারি যে, সেই minimum-টা $x = 1$-এই হতে বাধ্য, কারণ সেটাই হল একমাত্র positive সংখ্যা x, যার জন্য $\frac{1}{x} = x$ হয়। এটাও দেখতে পাচ্ছি যে, $x = 1$-এ $f(x)$-এর value হল 4. সুতরাং প্রথম অংশটা হয়ে গেলে দ্বিতীয় আর তৃতীয় অংশ চট্ করেই হয়ে যাচ্ছে। এবার তবে প্রথম অংশটা করি। ধরো

$$g(x) = x + \frac{1}{x}.$$

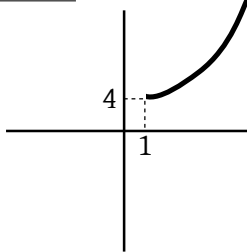
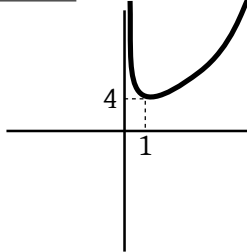
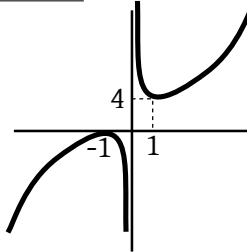
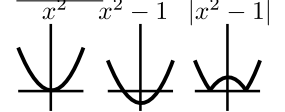
তাহলে $f(x) = g(x) + g(x^2)$ এবং $f'(x) = g'(x) + 2xg'(x^2)$.

আমাদের দেখতে হবে $x > 0$-র জন্য কখন $f'(x) \lesseqgtr 0$ হয়।

চট্ করে $g'(x)$ বার করে দ্যাখো। আমরা তো আন্দাজ করে ফেলেইছি যে, $x = 1$-এ minimum থাকবে। পরীক্ষা করে দ্যাখো যে, সত্যিই $g'(x) \lesseqgtr 0 \iff x \lesseqgtr 1$ হচ্ছে।

যেহেতু $x > 0$, তাই $f'(x) \lesseqgtr 0 \iff x \lesseqgtr 1$ হতেও বাধ্য। ব্যস্, প্রথম অংশ হয়ে গেল।

এবার খালি-হাতে গ্রাফ আঁকতে হবে। প্রথমে লক্ষ করো যে, domain-টা হল $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$. প্রথমে গ্রাফটা $x > 0$ অংশটার উপর আঁকি। আমরা জানি minimum-টা হল 4. সেটা $x = 1$-এ হয়, তার আগে গ্রাফটা নামছিল এবং তার পরে উঠতেই থাকবে। আরো জানি যে x-এর যে কোনো value-র জন্যই $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. সুতরাং একটা U গোছের চেহারা হবে, যার বাঁদিকটা $(0,1)$-এর উপরে আর ডানদিকটা $(1,\infty)$-র উপরে। এখন U-টার ডান হাতটা ঠিক কীভাবে উপরে উঠবে? যখন x খুব বড় কিছু হবে, তখন $\frac{1}{x}$ আর $\frac{1}{x^2}$ দুজনেই খুব ছোটো হবে, তাই গ্রাফে ওদের খুব একটা ভূমিকা থাকবে না। পরে রইল খালি x আর x^2. এদের মধ্যে x^2 অ--নে--ক বেশী বড় হবে, ফলে মুখ্য ভূমিকাটা সেই পালন করবে। মানে U-এর ডান হাতটা মোটামুটিভাবে x^2-এর গ্রাফের ডান হাতটার মত দেখতে হবে। সুতরাং পেলাম Fig 36-এর মত চেহারাটা। $(0,1)$-এর মধ্যে আঁকতে হবে 'U'-এর অন্য হাতটা (Fig 37)।

এবার দেখব $x < 0$ হলে গ্রাফটা কীরকম হয়। এটাও একই রকম, খালি 'U'-টা উল্টে যাবে--$(-1,0)$-এর মধ্যে নামবে, $(-\infty,-1)$-র উপর উঠবে। কিন্তু এখানে maximum-টা হবে $x = -1$-এ, এবং সেখানে function-টার value হবে 0.

সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো Fig 38-এর মত। ■

18.3 প্যাঁচ না থাকার প্যাঁচ

The style of no style.

--নিজস্ব মার্শাল আর্টের বর্ণনায় Bruce Lee

Differentiate করে maximum-minimum বার করে করে অনেকের একটা বদভ্যাস দাঁড়িয়ে যায় যে, maximum-minimum-এর অংক দেখলেই সব কিছু ভুলে differentiate করতে শুরু করে। অনেক সময়েই কিন্তু সহজ বুদ্ধিতেই এরকম অংক কষে ফেলা যায়। এবার সেরকম কিছু উদাহরণ দেখব।

Example 20: State whether the following statement is true or false: $f(x) = |x|$ has no minimum value. **(HS2014.1j)**

SOLUTION: এখানে গ্রাফ দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে, 0 হল minimum. তাই উত্তর হবে false.

✎The given statement is false, since 0 is the minimum value of $f(x) = |x|$.

এক লাইনে কারণটাও লিখে দেওয়া ভালো--

✎

⟦ Because:

$|0| = 0$ and for all $x \in \mathbb{R}$ we have $|x| \geq 0$.

⟧

■

Exercise 6: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Then

(A) f has local minima at $x = \pm 1$ but no local maximum

(B) f has local maximum at $x = 0$ but no local minimum

(C) f has local minima at $x = \pm 1$ and a local maximum at $x = 0$

(D) none of the above is true.

(Bstat/Bmath2012short.11)

HINT:

এখানে যে function-টা দিয়েছে তার গ্রাফটা এঁকে ফেললেই দেখতে পাবে কোথায় local minimum আছে, আর কোথায়ই বা local maximum আছে। গ্রাফটা আঁকার জন্য x^2 থেকে শুরু করো, 1 ঘর নামিয়ে $x^2 - 1$ বানাও, তারপর x-axis-এর নীচের অংশটাকে প্রতিফলিত করে উপরে তুলে আনলেই পাবে Fig 39। ■

Example 21: The minimum value of the function $f(x) = 2|x - 1| + |x - 2|$ is

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(JEE2013.27)
SOLUTION: এরকম অংকে সাধারণতঃ $f(x)$-কে কেস ধরে ধরে ভেঙে লিখলে সুবিধা হয়--

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x)+(2-x) = 4-3x & \text{if } x<1 \\ 2(x-1)+(2-x) = x & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ 2(x-1)+(x-2) = 3x-4 & \text{if } 2 \leq x \end{cases}$$

লক্ষ করো যে প্রতিটা কেসেই আমরা একটা সরলরেখা পাচ্ছি (যেহেতু $mx+c$ আকারের), এবং কোথাও কোনো ভাঙা নেই। $x=1$-এর বাঁদিকে slope হল $-3<0$, সুতরাং কমছে। $x \in (1,2)$-এর জন্য slope হচ্ছে $1>0$, মানে বাড়ছে। $x>2$-এর জন্য slope হবে $3>0$, সুতরাং এখানেও বাড়ছে। অতএব minimum হবে $x=1$-এ, $f(1)=1$. তাই উত্তর হল (B). ■

এইবার maximum বা minimum বার করার দুটো অংক দেখব, যেখানে বাড়তি কিছু শর্ত থাকবে।

Example 22: The maximum value of $|x-1|$ subject to the condition $|x^2-4| \leq 5$ is

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5.

(BStat/BMath2013Short.13)
SOLUTION: এখানে $|x-1|$-এর maximum বার করতে হবে, বাড়তি শর্তটা হল $|x^2-4| \leq 5$. কী করে এগোব বুঝে নিই। এর জন্য মনে রেখো যে, a,b দুটো সংখ্যা হলে $|a-b|$ হল ওদের মধ্যে দূরত্ব। তাহলে $|x^2-4| \leq 5$ শর্তটাকে ভাবা যায় এইভাবে--x^2 আর 4-এর মধ্যে দূরত্ব কখনোই 5-এর বেশী হতে পারে না। ঠিক যেন x^2 একটা দড়িবাঁধা গরু (Fig 40)। দড়ির অন্যপ্রান্তটা 4-এ বাঁধা আছে, দড়ির দৈর্ঘ্য হল 5. তাহলে গরুটা কতটা জায়গায় চরতে পারবে? উত্তর হল $4-5=-1$ থেকে $4+5=9$ অব্ধি মানে $[-1,9]$. কিন্তু x^2 তো আর <0 হতে পারে না, তাই x^2 থাকতে পারে $[0,9]$-এর মধ্যে। তাহলে x থাকতে পারে $[-3,3]$-এর মধ্যে। প্রশ্ন হল, এর মধ্যে $|x-1|$ সবচেয়ে বেশী কত হতে পারে? অর্থাৎ 1-এর থেকে সবচেয়ে দূরে কতটা যেতে পারি। উত্তর হল -3, যেটা 1-এর থেকে $1-(-3)=4$ দূরত্বে আছে। সুতরাং উত্তর হল (C). ■

Example 23: Find the minimum value of x^2+y^2 in the bounded region, including the boundary, enclosed by $y=\frac{x}{2}$, $y=-\frac{x}{2}$ and $x=y^2+1$. **(BStat2015.8)**
SOLUTION: একেকটা জিনিস থাকে, যেটা আমাদের খুব পরিচিত, কিন্তু অংকের ভাষায় লিখলে কেমন যেন অপরিচিতের মত দেখায়। এই অংকটাও ঠিক তাই। এখানে গ্রাফ কাগজের উপর একটা জায়গা দিয়ে দিয়েছে এবং বলেছে তার মধ্যে কোন বিন্দুটা origin-এর সবচেয়ে কাছে। ছবিটা এঁকেছি Fig 41-এ। দেখতেই পাচ্ছ যে origin-টা এর মধ্যেই রয়েছে। তাই উত্তর

Fig 40

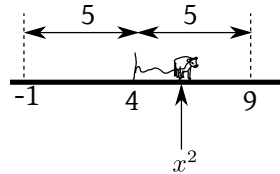



Fig 41

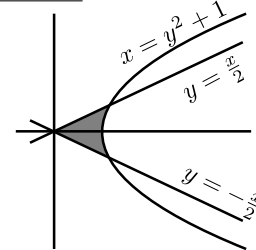
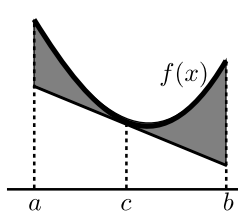
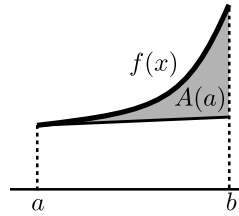
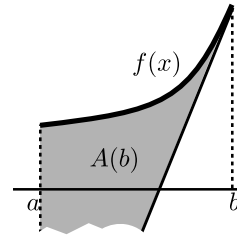



Fig 42 **Fig 43** **Fig 44**

হল 0. ■

এবার একটা অংক দেব যেটা দেখতে বেশ কঠিন লাগতে পারে, যদিও ছবি দিয়ে ভাবলে আসলে তেমন শক্ত নয়।

Example 24: Let f be a function such that $f''(x)$ exists, and $f''(x) > 0$ for all $x \in [a, b]$. For any point $c \in [a, b]$, let $A(c)$ denote the area of the region bounded by $y = f(x)$, the tangent to the graph of f at $x = c$ and the lines $x = a$ and $x = b$. Then

(A) $A(c)$ attains its minimum at $c = \frac{1}{2}(a+b)$ for any such f

(B) $A(c)$ attains its maximum at $c = \frac{1}{2}(a+b)$ for any such f

(C) $A(c)$ attains its minimum at both $c = a$ and $c = b$ for any such f

(D) the points c where $A(c)$ attains its minimum depend on f.

(BStat/BMathMCQ.29)
SOLUTION: খুবই বিদঘুটে দেখতে অংক। কিন্তু ছবি দিয়ে ভাবলে বেশ সহজ। ব্যাপারটা দেখিয়েছি Fig 42-এ। খানিকটা জায়গা শেড করা আছে, দেখছো? ওটার area-ই হল $A(c)$. ওর উপরের সীমা হল $f(x)$-এর গ্রাফটা। লক্ষ করো ওটা একটা বাটির মত, মানে convex, কারণ বলা আছে যে $f''(x) > 0$. শেড করা জায়গাটার বাঁ আর ডান সীমানা হল $x = a$ আর $x = b$ দিয়ে টানা vertical লাইন দুটো। নীচের সীমানাও একটা সরলরেখা, সেটা হল $x = c$-তে গ্রাফটার tangent. অংকটা হল কখন $A(c)$-টা সবচেয়ে বেশী বা কম হবে তাই নিয়ে। এখানে আমাদের প্রচুর স্বাধীনতা, $a, b, f(x)$ আর c আমরা যা খুশি নিতে পারি, খালি $f(x)$-কে বাটির মত হতে হবে, এই যা। এত যেখানে স্বাধীনতা, সেখানে কোনো কিছুই জোর দিয়ে বলা খুব মুস্কিল। যেমন ধরো যদি গ্রাফটা প্রায় পুরোই horizontal হয়ে একেবারে ডানদিকে খাড়া হয়ে ওঠে, তবে বুঝতেই পারছ $A(a)$ হবে $A(b)$-এর চেয়ে অনেক কম। না বুঝলে Fig 43 আর Fig 44 দেখে নাও। একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে, $A\left(\frac{a+b}{2}\right)$ থাকবে তার মাঝামাঝি কোথাও। সুতরাং প্রথম তিনটে option-ই বাদ হয়ে গেল। পড়ে রইল (D). ■

DAY 19
Rate

এইবার differentiation-এর একটা প্রয়োগ শিখব, যেটাকে বলা যেতে পারে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ। প্রয়োগটা হল "একটা variable-এর সাপেক্ষে আরেকটা variable-এর বৃদ্ধির হার" বার করা। ইংরাজিতে একে বলে

> “rate of increase of one variable with respect to (wrt) another variable.”

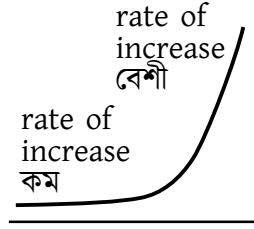
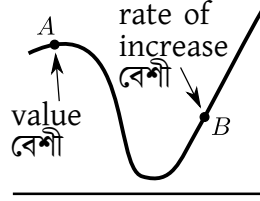
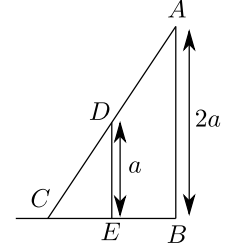



Fig 45 **Fig 46** **Fig 47**

এই লম্বা মত কথাটার মানে বুঝে নেওয়া যাক। আমরা প্রথম অধ্যায়েই বলেছি যে, কোনো function যদি দেওয়া থাকে $y = f(x)$, তবে সেটাকে একটা যন্ত্র বলে কল্পনা করা যায়, যেখানে ইনপুট হল x আর আউটপুট হল y. যখন x-এর value বদলাবে, তখন y-এর value-ও বদলাতে পারে। যদি x-এর value একটু বদলাও, তবে y-এর value কতটা বদলাবে, সেটা জানার ইচ্ছা থেকেই rate-এর ধারণাটার উদ্ভব। আমাদের প্রতিদিনকার জীবনে এর সবচেয়ে পরিচিত উদাহরণ বোধহয় হল velocity (গতিবেগ)। একটা গাড়ি সোজা রাস্তা ধরে এগোচ্ছে, মানে সময় (t)-এর সাথে সাথে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব (x)-ও বদলাচ্ছে। এখানে t-এর সাপেক্ষে x-এর বৃদ্ধির হারকে আমরা বলি velocity. যদি x-কে t-এর function হিসেবে গ্রাফ আঁকি, তবে t-এর প্রতিটা value-তে velocity-টা হবে ওই বিন্দুতে গ্রাফটার slope. এইটা আমরা গত অধ্যায়েই উল্লেখ করেছিলাম। ব্যাপারটা যেকোনো variable-এর সাপেক্ষে যে কোনো variable-এর ক্ষেত্রেই খাটে, অর্থাৎ $y = f(x)$ হলে x-এর সাপেক্ষে y-এর বৃদ্ধির হার হবে $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. এই ব্যাপারটা ছবি দিয়ে ভালো বোঝা যায়। ধরো, Fig 45-এর গ্রাফটায় তুমি x-কে বাড়াচ্ছ। তবে y-ও বাড়ছে, কিন্তু যখন তুমি গ্রাফের প্রায় সমতল অংশটায় আছো, তখন y বাড়ছে খুব আস্তে আস্তে, মানে তার বৃদ্ধির হার খুবই কম। আবার যেই গ্রাফের খাড়া অংশটায় পৌঁছবে তখন y একেবারে তড়বড়িয়ে বাড়তে শুরু করবে, মানে বৃদ্ধির হার বেড়ে যাবে। মনে রেখো যে, "y-এর value বেশী হওয়া" আর "তার বৃদ্ধির হার বেশী হওয়া" আলাদা জিনিস। যেমন Fig 46-তে যে গ্রাফটা রয়েছে, সেখানে A বিন্দুটা B বিন্দুর চেয়ে উপরে, তাই A বিন্দুতে y-এর value বেশী। আবার B বিন্দুতে গ্রাফটা বেশী খাড়া, মানে তার slope বেশী। তাই B বিন্দুতে বৃদ্ধির হার বেশী।

19.1 First order

$\frac{dy}{dx}$ হল x-এর সাপেক্ষে y-এর বৃদ্ধির হার। যদি x বাড়লে y কমে, তবে $\frac{dy}{dx} < 0$ হবে। সুতরাং $-\frac{dy}{dx}$-কে বলতে পারো x-এর সাপেক্ষে y-এর কমার হার (rate of decrease)। যদি চিহ্ন নিয়ে মাথা ঘামাতে না চাও, তবে পাবে $\left|\frac{dy}{dx}\right|$, যেটা দেবে x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার (rate of change)।

Example 25: A lamp is on the top of a lamp post of height $2a$ meter situated on a straight road. A boy of height a meter walks towards the post at the speed of c meter/minute. Find the rate of decrease of the length of his shadow.[5] **(HS2015.3bi)**

SOLUTION:

✎The situation is shown in Fig 47. Here AB is the lamppost, DE is the boy, and CE is the shadow. The two triangles ABC and DEC are similar.

⟦ Because:

$\angle C$ is common. $\angle CED = 90° = \angle CBA$.

⟧

Thus

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

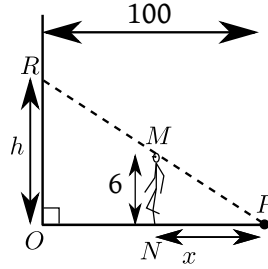



Fig 48

Hence $CE = \frac{1}{2}CB$. Thus $CE = EB$.
We are given that EB decreases at the rate c meter/minute. So CE must also decrease at the same rate.
So the required answer is c meter/minute.

■

এই অংকটা বেশ সহজে হয়ে গেল, কারণ যে জিনিসটার rate বার করতে দিয়েছিল (মানে EC), আর যে জিনিসটার rate দিয়ে দিয়েছিল (মানে BE), তারা ছিল সমান। এমনটা যে সব অংকেই হবে, সেরকম কোনো গ্যারান্টি নেই। তখন অনেক সময়ে এই দুটো জিনিসের মধ্যে (মানে যার rate দিয়েছে, আর যার rate বার করতে হবে) তাদের মধ্যে ধাপে ধাপে একটা সম্পর্ক বার করে সেটাকে differentiate করতে হয়। এবং তার জন্য chain rule খুব কাজে দেয়। নীচের অংকটা তার একটা উদাহরণ।

Example 26: A lantern is placed on the ground 100 feet away from a wall. A man six feet tall is walking at a speed of 10 feet/second from the lantern to the nearest point on the wall. When he is midway between the lantern and the wall, the rate of change in the length of his shadow is

(A) 3.6 ft./sec. (B) 2.4 ft./sec. (C) 3 ft./sec. (D) 12 ft./sec.

(BStat/BMath2015.19)

SOLUTION: আগের অধ্যায়ে chain rule শেখার সময়ে আমরা একটা উদ্ভট যন্ত্র দেখেছিলাম, মনে আছে? সেখানে একটা স্প্রিং সংকুচিত হলে একটা গিয়ার ঘুরত, সেটা আবার আরেকটা গিয়ারকে ঘোরাত, এইভাবে ধাপে ধাপে ব্যাপারটা একটা লেজার রশ্মি কোথায় পড়বে সেটা ঠিক করে দিত। এই অংকটাও সেইরকমই, খালি ওরকম উদ্ভট নয়, আর ধাপের সংখ্যাও কম, মোটে দুটো। ছবি দিয়ে বোঝা যাক (Fig 48)। মেঝের উপর P বিন্দুতে একটা লণ্ঠন আছে, সেটা থেকে আলো গিয়ে একটা দেওয়ালে পড়ছে। আলোর সামনে একটা লোক হাঁটছে দেওয়ালের দিকে, তার ছায়া পড়েছে দেওয়ালে। যতই সময় যাচ্ছে (মানে t বাড়ছে) , ততই লোকটা এগোচ্ছে (মানে x বাড়ছে), আর ততই ছায়াটার উচ্চতাও বদলাচ্ছে (মানে h বদলাচ্ছে)। অতএব আমাদের chain rule-এর chain-টা হল এই--

সময় $(t) \longrightarrow$ লোকটার অবস্থান $(x) \longrightarrow$ ছায়ার উচ্চতা (h).

এবার কিছুমাত্র অংক না করে, কেবল মনে মনে পুরো ব্যাপারটা কল্পনা করে বলো তো t যত বাড়ছে, h-টা ততই বাড়ছে নাকি কমছে? আগে এই উত্তরটা ভেবে নাও। সেটা এবার আমরা নীচের অংকের সাথে মিলিয়ে নেব।
আমাদের প্রথম ধাপের derivative-টা বলে দিয়েছে, মানে $\frac{dx}{dt} = 6$. বার করতে বলেছে $\frac{dh}{dt}$. সুতরাং আমাদের কাজ হবে h-কে x-এর function হিসেবে প্রকাশ করে তার derivative বার করা। এখানে দুটো similar triangle (সদৃশ ত্রিভুজ) চোখে পড়ছে কি? এরা হল OPR এবং NPM. তা থেকে পাবে

$$\frac{6}{x} = \frac{h}{100}.$$

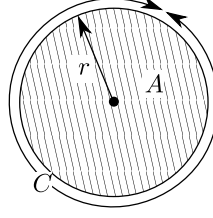



Fig 49

মানে $h = \frac{600}{x}$. সুতরাং $\frac{dh}{dx} = -\frac{600}{x^2}$.
অতএব chain rule বলছে--

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dx}{dt} \times \frac{dh}{dx} = 10 \times \frac{-600}{x^2}$$

লক্ষ করো এটা negative. তার মানে সময়ের সাথে সাথে ছায়াটা ক্রমশঃ ছোটো হচ্ছে। এটাই তোমাকে একটু আগে আন্দাজ করতে বলেছিলাম। এবার বলে দিয়েছে যে, লোকটা এখন আছে "midway between the lantern and the wall", অর্থাৎ কিনা লণ্ঠন আর দেওয়ালের ঠিক মাঝখানে। তাই $x = \frac{100}{2} = 50$. সেটা বসালে হয়--

$$\frac{dh}{dt} = -10 \times \frac{600}{x^2} = -\frac{10 \times 600}{50^2} = -2.4.$$

সমস্যা হল option-গুলোর কোনোটাই তো negative নয়! তবে উপায়? আসলে আমরা যেটা বার করেছি, মানে $\frac{dh}{dt}$, সেটা হল t-এর সাপেক্ষে h-এর বৃদ্ধির হার। কিন্তু আমাদের অংকে চেয়েছে খালি rate of change. তাই আমরা $\frac{dh}{dt}$-এর absolute value নেব। অতএব উত্তর হবে (B). ■

একইরকম আরেকটা অংক দেখা যাক। এবার সবটা লিখে লিখে বোঝাতে হবে।

Example 27: If the area of a circle increases uniformly, then show that the rate of increment of its circumference is inversely proportional to its radius.[4] **(HS2016.2ciiior)**

SOLUTION: এই অংকটায় কী চেয়েছে সেটা ভালো করে বুঝে নেওয়া যাক। একটা circle আছে Fig 49-এর মত। ওর radius হল r, আর area হল A আর circumference (পরিধি) হল C. কল্পনা করো যেন circle-টা ক্রমশঃই ফুলছে। ঠিক যেমন একটা ফাউন্টেন পেনের নিব খবরকাগজের গায় ঠেকালে কাগজটা কালি শুষে নিতে থাকে, আর তার ফলে একটা কালির বৃত্ত ক্রমশঃই ছড়িয়ে পড়ে নিবটাকে কেন্দ্র করে, সেরকম আর কি! যেহেতু সময়ের সাথে সাথে circle-টা ফুলছে, তাই r, A এবং C সকলেই হল সময় (t)-এর function. তাই r মানে আসলে $r(t)$, তেমনি A আর C মানে আসলে $A(t)$ আর $C(t)$. এদিকে circle-এর ধর্ম থেকে তো জানোই যে সবসময়েই $A = \pi r^2$ এবং $C = 2\pi r$ হবে। এখানে বলে দিয়েছে যে A-টা বাড়ছে "uniformly", অর্থাৎ t-এর সাপেক্ষে A-র বৃদ্ধির হার সর্বদা constant. মানে $A'(t)$ হল constant. আর তা থেকে দেখাতে বলেছে যে, $C'(t) \propto \frac{1}{r(t)}$. এখানে "rate of increment" বলে যে কথাটা ব্যবহার করেছে ওটার মানে rate of increase. এখানে $A'(t)$ কীরকম সেটা বলে দিয়েছে, আর কাজ করতে বলেছে $C'(t)$. তাই আমরা chain rule লাগাব এই শিকলটা নিয়ে--

সময় $(t) \longrightarrow$ area $(A) \longrightarrow$ circumference (C).

এখানে প্রথম ধাপের derivative বলেছে constant--

✎Here $A'(t) = k$, a constant.

এবার দ্বিতীয় ধাপে derivative বার করতে হবে। তার জন্য C-কে A-র function হিসেবে প্রকাশ করতে পারলে সুবিধা হবে--

✎We know that $A = \pi r^2$ and $C = 2\pi r$.
So $C = 2\pi\sqrt{A/\pi} = 2\sqrt{A\pi}$.

ব্যস্, এবার differentiate করে ফেলা যাক--

✎Hence $\frac{dC}{dA} = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$.

এবার chain rule--

✎So, by chain rule,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dA}{dt} \times \frac{dC}{dA} = k\sqrt{\frac{\pi}{A}}.$$

দেখাতে হবে যে, এই জিনিসটা $\propto \frac{1}{r}$, মানে $\frac{\text{কোনো constant}}{r}$ চেহারার--

✎Now, $\sqrt{A} = \sqrt{\pi}r$.
So $\frac{dC}{dt} = k\sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{k}{r}$.
So $\frac{dC}{dt} \propto \frac{1}{r}$, as required.

■

19.2 Physics-এ কিছু প্রয়োগ

Rate বার করতে পারাটা physics-এ খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এরকম কিছু প্রয়োগ এবার আমরা শিখব। আমরা আগেই দেখেছি যে, velocity হল একটা first order derivative. যদি একটা গাড়ি সরলরেখা বরাবর t সময়ে $x(t)$ অবস্থানে থাকে, তবে $x'(t)$ হল t মুহূর্তে তার velocity. যদি গাড়িটা সরলরেখা বরাবর না গিয়ে কোনো curve বরাবরও যায়, তবেও কিন্তু differentiate করে velocity বার করা যায়। খালি সেখানে curve-টাকে সময় (t) দিয়ে parametric-ভাবে প্রকাশ করতে হয়। নীচের উদাহরণে সেটা দেখালাম।

Example 28: ধরো একটা স্যাটেলাইট circular পথে ঘুরছে (Fig 50)। এখানে circle-টার radius হল R, এবং স্যাটেলাইটটার angular velocity (কৌণিক বেগ) হল ω, যেটা একটা constant. যদি শুরুতে স্যাটেলাইটটা P বিন্দুতে থাকে, তবে t সময়ে ওটা ωt পরিমাণ কোণ ঘুরবে, তাই t মুহূর্তে তার অবস্থানকে লেখা যায় $(x(t), y(t))$ যেখানে

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos\omega t, \\ y(t) &= R\sin\omega t. \end{aligned}$$

Fig 50

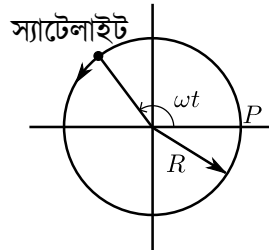
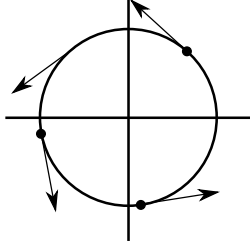
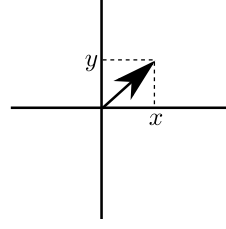
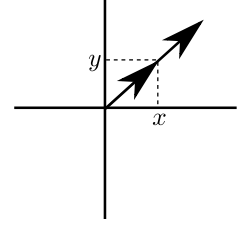



Fig 51 **Fig 52** **Fig 53** **Fig 54**

এ থেকে বার করো t মুহূর্তে স্যাটেলাইটটার velocity কত।
SOLUTION: Velocity হবে

$$(x'(t), y'(t)) = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t).$$

Fig 51-তে t-এর বিভিন্ন value-র জন্য velocity-টাকে তীর চিহ্ন দিয়ে দেখিয়েছি। লক্ষ কর এটা সব সময়েই circle-টার tangent বরাবর রয়েছে। ■

যদি আরেকবার differentiate করো, তবে পাবে $(x''(t), y''(t))$, যেটা হল ওই মুহূর্তে স্যাটেলাইটটার acceleration (ত্বরণ)। এই acceleration জিনিসটা খুব বেশী গুরুত্বপূর্ণ হত না, যদি না নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রটা বলত--acceleration-কে mass (ভর) দিয়ে গুণ করলে force (বল) পাওয়া যায়। সুতরাং যদি স্যাটেলাইটটার অবস্থান সম্পূর্ণভাবে জানা থাকে, মানে $x(t)$ আর $y(t)$ এই function দুটো জানা থাকে, আর তার mass (m) জানা থাকে, তবে $(mx''(t), my''(t))$ বার করলেই জেনে যাবে তার উপর কত force কাজ করছে। ব্যাপারটা খুবই কাজের, কারণ force-এর ফলেই স্যাটেলাইটটা চলছে, তাই ভাবতে পারো যেন force-টা হল ইনপুট আর $(x(t), y(t))$-টা হল আউটপুট। তুমি যখন স্যাটেলাইটটার গতিপথ ঠিক করছ, তখন তুমি আউটপুটটা কী চাও, সেটা ঠিক করছ। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র তোমাকে বাতলাচ্ছে এই আউটপুট পেতে হলে ঠিক কী ইনপুট দিতে হবে। এবং সেই কাজেই second order derivative অপরিহার্য। এবার সেরকম একটা অংক দেখব। কিন্তু তার আগে physics থেকে vector-এর ধারণাটা একটু মনে করিয়ে দিই। সাধারণতঃ একটা vector বলতেই যে চিত্রটা আমাদের মনে ভেসে ওঠে সেটা হল একটা তীরচিহ্ন। অংক কষার সময়ে আমরা মনে মনে একটা গ্রাফকাগজ কল্পনা করে, তীরটার লেজটাকে origin-এ বসাই। এর ফলে তীরের ডগাটা পড়ল ধরো (x, y) বিন্দুতে (Fig 52)। তাহলে অংকের ভাষায় তীরটাকে আমরা লিখব (x, y). এবার Fig 53 দেখলেই বুঝবে যে, vector-টার magnitude (মান), অর্থাৎ তীরটার দৈর্ঘ্য হল $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Example 29: এবার ধরো তীরটাকে টেনে দ্বিগুণ লম্বা করে দিলাম (ওর অভিমুখের কোনো পরিবর্তন না ঘটিয়ে)। Fig 54 দ্যাখো। তবে নতুন তীরটা অংকের ভাষায় কী হবে?
SOLUTION: $(2x, 2y)$. ■

Example 30: আবার Fig 52-এর দিকে তাকাও। বলো তো $(-x, -y)$-কে তীর হিসেবে আঁকলে কীরকম দেখাবে? সেটার direction (অভিমুখ) কোন দিকে হবে?
SOLUTION: (x, y) আর $(-x, -y)$ দুটো তীরই এঁকেছি Fig 55-এ। এদের দৈর্ঘ্য সমান, কিন্তু অভিমুখ পরস্পরের ঠিক বিপরীত। ■

Example 31: আবার সেই স্যাটেলাইট নিয়েই কাজ করছি। যদি ওর mass হয় m, তবে ওকে ওই কক্ষপথে রাখবার জন্য ওর উপরে কতটা force দিতে হবে? মনে রেখো force হল একটা vector, তাই force-এর magnitude এবং direction দুটোই বলতে হবে।

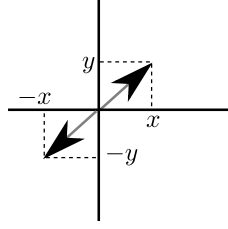



Fig 55

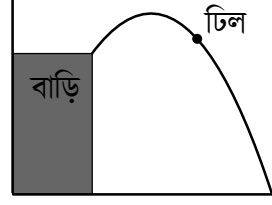



Fig 56

SOLUTION: গতিপথটাকে parametric আকারে তো আগের অংকেই লিখেছিলাম এইভাবে

$$(x(t), y(t)) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t).$$

একে দুবার differentiate করলে পাবে

$$(x''(t), y''(t)) = (-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t).$$

এটাই হল ওর acceleration. তাই force-টা হবে

$$(mx''(t), my''(t)) = (-mR\omega^2\cos\omega t, -mR\omega^2\sin\omega t) = -mR\omega^2(\cos\omega t, \sin\omega t).$$

এর magnitude হবে $mR\omega^2$ এবং direction হবে centre-এর দিকে। Physics-এ এই force-টার একটা নাম আছে-- centripetal force. ■

এবার একইরকম একটা অংক তোমার করা জন্য।

Exercise 7: একটা উঁচু বাড়ি থেকে একটা ঢিল ছোঁড়া হয়েছে (Fig 56)। যদি t মুহূর্তে ঢিলটার অবস্থান হয়

$$(x(t), y(t)) = \left(a + ut,\ \ b + vt - \tfrac{1}{2}gt^2\right),$$

তবে ঢিলটার উপর কখন কীরকম force কাজ করছে বার করতে হবে। বলা আছে যে, ঢিলটার mass হল m. প্রথমে সহজ বুদ্ধিতে উত্তরটা আন্দাজ করার চেষ্টা করো। তারপর অংক কষে মিলিয়ে দ্যাখো। ■

এবার আমরা একটা অংক দেখব, যেখানে second order derivative-এর কোনো উল্লেখ নেই, কিন্তু তাও second order derivative কাজে লাগবে।

Example 32: Consider the function $f(x) = x^4 + x^2 + x - 1,\ x \in (-\infty, \infty)$. The function

(A) is zero at $x = -1$, but is increasing near $x = -1$

(B) has a zero in $(-\infty, -1)$

(C) has two zeros in $(-1, 0)$

(D) has exactly one local minimum in $(-1, 0)$.

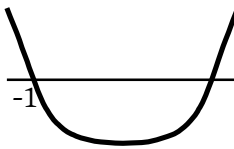



Fig 57

(Bstat/Bmath2012short.20)
HINT:
Option-গুলোর মধ্যে সবচেয়ে সহজ দেখাচ্ছে প্রথমটা, $f(-1)$ বার করে 0 হচ্ছে কিনা দেখে নিলেই চলবে, আর $f'(-1) > 0$ পরীক্ষা করাও খুব কঠিন নয়। কাজটা করলেই দেখবে যে, $f(-1)$ সত্যিই 0 হচ্ছে, কিন্তু $f'(-1) < 0$ হয়ে যাচ্ছে। তাই (A) বাদ হয়ে গেল। বাকি option-গুলোর জন্য $f(x)$-এর গ্রাফের আদলটা ভেবে নিলে সুবিধা হবে। $f(x)$ একটা polynomial, যারা degree হল even, এবং x^4-এর coefficient হল > 0. তাই গ্রাফটা একটা ঢেউখেলানো জিনিস হবে, যার দুটো প্রান্তই উঠতে উঠতে মহাশূন্যে উঠবে। এবার পরপর দুবার differentiate করে $f''(x)$ বার করে দ্যাখো তো, কোথাও ওটা 0 হতে পারে কিনা! নাকি ওটা সবসময়েই positive? খালি এইটুকু তথ্যের ভিত্তিতে বলো তো $f(x)$-এর গ্রাফটা কি convex নাকি concave? এ থেকে বোঝা উচিত যে গ্রাফটার আদল হবে Fig 57-এর মত। এ থেকেই আরো দুটো option বাদ হয়ে যাবে। তাহলে পড়ে রইল কী? ভালো করে চিন্তা করে বুঝে নাও। তারপর উত্তর দেখে মিলিয়ে নিও।
■

DAY 20
Tangent এবং normal (part 1)

এইবার কিছু অংক করব যেখানে আমাদের কাজ করতে হবে tangent আর normal-দের দিয়ে। এদের মধ্যে tangent-এর সঙ্গে তো বহুবারই দেখা হয়েছে। Normal কাকে বলে সেটা কালকে বলব। তার আগে tangent-এর equation কী করে বার করে শিখে নিই। এতদিন পর্যন্ত আমরা সবসময়েই tangent-এর slope বার করেই ক্ষান্ত দিয়েছি। এবার পুরো equation-টা লিখতে হবে। সেটা খুব একটা কঠিন নয়, এবং এইভাবে করা যায়--

> ধরো একটা curve-এর উপর একটা বিন্দু দিয়েছে (x_1, y_1). সেই বিন্দুতে কোনো ভাঙা বা খোঁচ নেই, এবং tangent-টাও vertical হয়ে যায় না। তোমাকে tangent-এর equation-টাকে $y = mx + c$ আকারে লিখতে হবে। তুমি প্রথমেই differentiation-এর সাহায্যে ওই বিন্দুতে curve-টার slope বার করে ফেলবে। এই slope-টাই হল m. যদি curve-টা কোনো function-এর গ্রাফ হয়, তবে এমনি differentiation দিয়েই কাজ হবে, নইলে implicit বা parametric differentiation লাগাতে হবে। যেই m বেরিয়ে গেল, অমনি c বার করে ফেলতে পারবে এই কথাটা ব্যবহার করে যে, tangent-টা (x_1, y_1) দিয়ে যেতে বাধ্য। তাই $y_1 = mx_1 + c$ হবেই। অতএব পেয়ে যাচ্ছি $c = y_1 - mx_1$. এবার $y = mx + c$-কে একটু সাজিয়ে লিখলে মনে রাখবার সুবিধা হতে পারে--
> $$y - y_1 = m \cdot (x - x_1).$$

Example 33: The tangent at a point (a, b) to the curve $y = \sin x$ is parallel to the line $2y = x$. If $b > 0$, find b.[2] **(HS2014.2fiv)**
SOLUTION:

✎ $\because (a,b)$ lies on the curve,

$\therefore b = \sin a$.

Now $\frac{dy}{dx} = \cos x$.

$\therefore$ the slope of the tangent to the curve at (a,b) is $\cos a$.

$\because$ The tangent is parallel to $2y = x$, ie, $y = \frac{1}{2}x$,

$\therefore$ the slope is $\frac{1}{2}$. So $\cos a = \frac{1}{2}$.

আমাদের বার করতে হবে b, যেটা আমরা জানি $\sin a$-র সমান। সুতরাং প্রশ্ন হল $\cos a = \frac{1}{2}$ হলে $\sin a$ কত হয়।

✎ So $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Thus $b = \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ since $b > 0$.

■

Example 34: For the curve $x^2 + 4xy + 8y^2 = 64$, the tangents are parallel to the x-axis only at the points

(A) $(0, 2\sqrt{2})$ and $(0, -2\sqrt{2})$

(B) $(8, -4)$ and $(-8, 4)$

(C) $(8\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ and $(-8\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

(D) $(8, 0)$ and $(-8, 0)$

(JEE2013.10)

SOLUTION: এখানে দেখতে হবে কোথায় কোথায় $\frac{dy}{dx} = 0$ হয়, কারণ tangent-টা x-axis-এর parallel (সমান্তরাল) হওয়ার মানে তার slope হল 0. দুঃখের কথা y-কে এখানে x-এর function হিসেবে লিখে ফেলা খুব একটা সহজ মনে হচ্ছে না। তাই implicit differentiation ছাড়া গত্যন্তর নেই। আমরা গত অধ্যায়েই শিখেছিলাম যে implicit differentiation করার জন্য ধরে নিতে হবে যে, যে বিন্দুতে কাজ করছি সেখানে tangent-টা vertical হয়ে যায় না। তা, আমরা খুঁজছি এমন বিন্দু যেখানে tangent-টা horizontal, তাই vertical হয়ে যাওয়ার কোনো ভয় নেই।
সুতরাং implicit differentiation করে পাই

$$2x + \underbrace{4y + 4x\frac{dy}{dx}} + 16y\frac{dy}{dx} = 0.$$

সুতরাং $\frac{dy}{dx} = 0$ হলে

$$2x + 4y = 0,$$

বা $x = -2y$. এবার আমাদের মূল equation-এ এই শর্তটা বসালে খালি y-এর একটা equation পাবে। সেটাকে সমাধান করলেই বিন্দু দুটো বেরিয়ে যাবে। কিন্তু এখানে অবশ্য তত খাটতে হবে না, কারণ এই $x = -2y$ শর্তটা খালি (B)-এর ক্ষেত্রেই পালিত হচ্ছে। অতএব বাকিরা বাদ হয়ে গেল। উত্তর হল তাহলে (B). চাইলে পরীক্ষা করে দেখতে পারো যে, সত্যিই $(8, -4)$ আর $(-8, 4)$ বিন্দু দুটো আমাদের curve-এর উপর আছে। সেটা তো equation-এ বসালেই দেখা যায়।

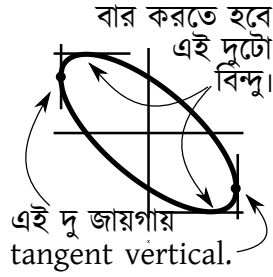



Fig 58

এখানে গ্রাফ আঁকা মোটেই সহজ নয়। কিন্তু তোমার বোঝার সুবিধার জন্য আমরা কম্পিউটার দিয়ে গ্রাফটা এঁকেছি Fig 58-এ। ■

এইবার দুটো অংক করব যেখানে একটা curve আর একটা সরলরেখা দেওয়া থাকবে, এবং আমাদের এমন একটা শর্ত বার করতে হবে, যাতে সরলরেখাটা curve-টার tangent হয়।

Example 35: If $y = mx + c$ is the tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ at a point on it, using calculus show that $c^2 = a^2m^2 + b^2$. Find the coordinates of the point of contact.[4] **(HS2014.3ei)**
SOLUTION: এরকম অংকে অনেক সময়ে এটাই গুলিয়ে যায় যে, কীভাবে এগোতে হবে। তাই গোড়াতেই আমাদের পরিকল্পনা ছকে নিই। একটা সরলরেখা দিয়ে দিয়েছে $y = mx + c$, আর একটা ellipse-ও দিয়েছে। বলেছে যে, সরলরেখাটা ওই ellipse-এর tangent. যে বিন্দুতে tangent, (মানে যাকে বলে **point of contact**) তার একটা নাম দিয়ে নিই--

✎Let the point of contact be (x_1, y_1).

তাহলে এই (x_1, y_1) তিনটে শর্ত পালন করে--এক, এটা $y = mx + c$-এর উপরে আছে। সুতরাং--

✎Then

$$y_1 = mx_1 + c. \qquad (1)$$

দুই, এটা ellipse-টার উপরেও আছে--

✎Also,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

আর তিন, ওই বিন্দুতে ellipse-টার slope নিশ্চয়ই m-এর সমান--

✎Also, the slope of the ellipse at (x_1, y_1) equals m.

এই শেষের শর্তটাকে $\frac{dy}{dx}$ দিয়ে লিখব। তার জন্য y-কে x-এর function হিসেবে লিখে নিতে পারলে সুবিধা হত। কিন্তু $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ থেকে y-কে x-এর function হিসেবে লেখা যাচ্ছে না (কারণ y^2 থেকে y-তে পৌঁছতে গেলে square root-এর আগে $\pm$ চলে আসবে)। তাই আমরা implicit differentiation করব।

✎Implicitly differentiating the equation of the ellipse, we have

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y\frac{dy}{dx}}{b^2} = 0.$$

Thus at (x_1, y_1),

$$\frac{2x_1}{a^2} + \frac{2y_1\frac{dy}{dx}}{b^2} = 0,$$

or

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1b^2}{y_1a^2}.$$

তার মানে আমাদের তৃতীয় শর্তটা হল--

✎Thus

$$-\frac{x_1b^2}{y_1a^2} = m. \qquad (\mathbf{3})$$

আমাদের দেখাতে বলেছে $c^2 = a^2m^2 + b^2$, যার মধ্যে কোনো x_1 বা y_1 নেই। তাই এইবার আমাদের কাজ হবে এই তিনটে শর্ত ব্যবহার করে x_1 আর y_1-কে তাড়ানো। প্রথমে y_1-কে তাড়াই--

✎From $(\mathbf{1})$ and $(\mathbf{3})$,

$$\frac{x_1b^2}{(mx_1+c)a^2} = -m.$$

এখান থেকেই x_1 বেরিয়ে যাচ্ছে--

✎Hence

$$x_1 = \cdots = -\frac{mc}{\frac{b^2}{a^2}+m^2}.$$

এখানে $\cdots$ মানে হল কিছু মামূলী ধাপ বাদ দিয়ে গিয়েছি, যেগুলো তুমি ঢুকিয়ে নিও।
এবার $y_1 = mx_1 + c$ ব্যবহার করলে y_1-ও বেরিয়ে যাবে--

✎So

$$y_1 = \cdots = -\frac{m^2c}{\frac{b^2}{a^2}+m^2} + c.$$

সুতরাং অংকের দ্বিতীয় অংশটা আগে হয়ে গেল। প্রথম অংশের জন্য x_1 আর y_1 যা বেরোল সেটাকে তিনটে শর্তের কোনো একটাতে বসাতে হবে। দ্বিতীয় শর্তটা এখনও ব্যবহার করা হয় নি, ওটাতেই বসাই--

✎Putting these in $(\mathbf{2})$,

$$\frac{1}{a^2}\left(-\frac{mc}{\frac{b^2}{a^2}+m^2}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(-\frac{m^2c}{\frac{b^2}{a^2}+m^2}+c\right)^2 = 1.$$

এবার এটাকে দলাইমলাই করলেই $c^2 = a^2m^2 + b^2$ এসে যাবে। কিন্তু মাথাঠাণ্ডা না রাখলে ঘেঁটে যাবার সমূহ সম্ভাবনা। এইভাবে এগোও। প্রথমে বাঁদিক থেকে একটা c^2 নিংড়ে বার করো--

✎or,

$$c^2\left[\frac{1}{a^2}\left(-\frac{m}{\frac{b^2}{a^2}+m^2}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(-\frac{m^2}{\frac{b^2}{a^2}+m^2}+1\right)^2\right] = 1.$$

এবার লক্ষ করো, একটা $\frac{1}{b^2}$ কমন নিয়ে বার করে আনলে ভিতরে a^2 আর b^2 সর্বত্রই $\frac{b^2}{a^2}$ আকারে থাকে--

✎or

$$\frac{c^2}{b^2}\left[\frac{b^2}{a^2}\left(-\frac{m}{\frac{b^2}{a^2}+m^2}\right)^2+\left(-\frac{m^2}{\frac{b^2}{a^2}+m^2}+1\right)^2\right]=1.$$

এবার $\frac{b^2}{a^2}$-কে একটা সংক্ষিপ্ত কিছু নাম দিয়ে নিলে সুবিধা হবে, ধরো r.

✎Let $r=\frac{b^2}{a^2}$. Then

$$\frac{c^2}{b^2}\left[r\left(-\frac{m}{r+m^2}\right)^2+\left(-\frac{m^2}{r+m^2}+1\right)^2\right]=1,$$

or

$$r\left(\frac{m}{r+m^2}\right)^2+\left(\frac{r}{r+m^2}\right)^2=\frac{b^2}{c^2},$$

or $\cdots$ or $\frac{m^2}{r}+1=\frac{c^2}{b^2}$,

ফের কিছু মামূলী ধাপ তোমার করার জন্য ছেড়ে রেখেছি।

✎or

$$c^2=a^2m^2+b^2,$$

as required.

অংকের দ্বিতীয় অংশ তো আগেই করেছিলাম, একবার খালি উল্লেখ করে দিই--

✎Also, the point of contact is given by (x_1,y_1) as above.

■

Example 36: If the line $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ touches the curve $x^my^n=a^{m+n}$, prove that

$$p^{m+n}\cdot m^m\cdot n^n=a^{m+n}(m+n)^{m+n}\cdot\cos^m\alpha\cdot\sin^n\alpha.$$

[5] **(HS2015.3biii)**

SOLUTION: এখানেও আমরা আগের অংকটার মত করেই এগোব--

✎Let the point of contact be (x_1,y_1).

এর উপরে তিনটে শর্ত আসবে--এক, এটা সরলরেখাটার উপরে আছে--

✎Then

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=p. \tag{1}$$

দুই, (x_1,y_1) বিন্দুটা curve-টার উপরেও আছে--

✎Also

$$x_1^m y_1^n = a^{m+n}. \quad (\mathbf{2})$$

আর তিন, ওই বিন্দুতে curve-টার slope আর লাইনটার slope সমান। এই শর্তটাকে অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখতে হলে curve-টার slope আর লাইনটার slope আগে বার করে নিতে হবে। বুঝতেই পারছ যে, curve-টার slope বার করব differentiation করে, সুতরাং tangent-টা vertical হবে না ধরে নেব। অর্থাৎ সরলরেখাটা vertical নয়, মানে $y = mx + c$ আকারে লিখে নেওয়া যাবে--

✎The equation of the line is $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ or, assuming $\sin\alpha \neq 0$,

$$y = -(\cot\alpha)x + (\operatorname{cosec}\alpha)p.$$

এখানে $\sin\alpha = 0$ হলে লাইনটা হত $x\cos\alpha = p$, যেটা vertical.

✎So the slope of the line is $-\cot\alpha$.

ব্যস্, লাইনের slope বেরিয়ে গেল। এবার curve-টার slope বার করতে হবে। এখানে curve-এর equation-এ x, y মিলিয়ে মিশিয়ে দেওয়া আছে, খালি y-কে বাঁদিকে আনা যাচ্ছে না[3]। তাই implicit differentiation লাগাব--

✎Also $mx^{m-1}y^n + nx^m y^{n-1}\frac{dy}{dx} = 0$.

So $\frac{dy}{dx} = \cdots = -\frac{my}{nx}$ when $x, y \neq 0$.

যদি $x = 0$ বা $y = 0$ হয়ে যায়, তবে $\frac{dy}{dx}$-টা undefined হয়ে যাবে।

✎Since we have assumed that the curve has a non-vertical tangent at (x_1, y_1), so we must have $x_1, y_1 \neq 0$.

এইবার লাইনের slope আর curve-এর slope সমান হবার শর্তটা লিখি--

✎Hence

$$-\cot\alpha = -\frac{my_1}{nx_1}. \quad (\mathbf{3})$$

তিনটে শর্ত লেখা হল। শর্ত তিনটে m, n, α, x_1 আর y_1 দিয়ে তৈরী। এবার দ্যাখো কী প্রমাণ করতে বলেছে--

$$p^{m+n} \cdot m^m \cdot n^n = a^{m+n}(m+n)^{m+n} \cdot \cos^m\alpha \cdot \sin^n\alpha.$$

এর মধ্যে কোনো x_1, y_1 নেই। সুতরাং তিনটে শর্ত থেকে x_1 আর y_1-কে তাড়ানোর চেষ্টা করা যাক--

✎From $(\mathbf{1})$ and $(\mathbf{3})$ we get

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{pm}{(m+n)\cos\alpha}, \frac{pn}{(m+n)\sin\alpha}\right).$$

এখানে অবশ্যই বেশ কয়েকটা ধাপ লেগেছে। এগুলো তুমি করে নিও।

[3]সাবধান! $y^n = a^{m+n}x^{-m}$ লেখা গেলেও তা থেকে $y = \left(a^{m+n}x^{-m}\right)^{1/n}$ লিখে বোসো না যেন, যেমন $y^2 = 4$ হলেই বলা যায় না $y = 2$, একটা $\pm$-এর গল্প থেকেই যায়!

✎Putting this in (2) we get

$$p^{m+n} \cdot m^m \cdot n^n = a^{m+n}(m+n)^{m+n} \cdot \cos^m \alpha \cdot \sin^n \alpha,$$

as required.

■

DAY 21
Tangent এবং normal (part 2)

21.1 Angle

Differentiation-এর মূল কথাই হল slope বার করা, আর slope মানে হল কতটা খাড়া বা হেলে আছে। সেইটা মাপার আরেকটা কায়দা হল angle (কোণ) ব্যবহার করে। Angle-এর সঙ্গে slope-এর সম্পর্ক আমরা আগেই বলেছিলাম। Fig 59 দেখলেই সেটা মনে পড়ে যাবে--

$$\text{slope} = \tan\theta.$$

নীচের কয়েকটা অংকে আমাদের কাজ হবে θ বার করা।

Example 37: Suppose that the equation $f(x) = x^2 + bx + c = 0$ has two distinct real roots α and β. The angle between the tangent to the curve $y = f(x)$ at the point $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$ and the positive direction of the x-axis is

(A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°

(JEE2014.14)

SOLUTION: অংকটা ছবি দিয়েই হয়ে যায়। গ্রাফটা একটা parabola যার দুটো zero, একটা α-তে এবং অন্যটা β-তে। আর x^2-এর আগে কোনো মাইনাস নেই, সুতরাং দুহাত উপরে তোলা। সুতরাং গ্রাফটা হবে Fig 60-এর মত। $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ হল α আর β-র ঠিক মধ্যবিন্দু, তাই সেখানেই গ্রাফটা মোড় ঘুরছে। সুতরাং ওখানে tangent-টা হবে horizontal. তাই উত্তর হবে 0° মানে (A). এখানে কিন্তু উত্তর 180°-ও হতে পারত। তবে যেহেতু সেটা কোনো option-এ নেই, তাই আমরা খালি (A) নিয়েই সন্তুষ্ট থাকব। ■

আমরা সাধারণতঃ angle বা কোণ বলতেই মনে করি Fig 61-এর মত একটা ব্যাপার, যেখানে কোণটা রয়েছে দুটো সরলরেখার মধ্যে। কিন্তু দুটো curve-এর মধ্যেও কোণ সম্ভব। তার সংজ্ঞাটা এইরকম--

Fig 59

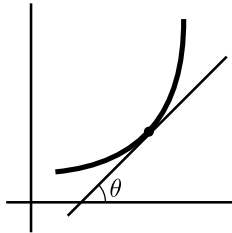



Fig 60

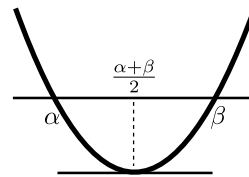
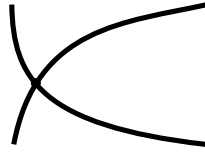
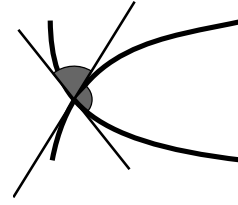



Fig 61 **Fig 62** **Fig 63**

> ধরো দুটো curve আছে, যারা একই বিন্দু P দিয়ে যায় (Fig 62)। ওই বিন্দুতে দুটো curve-এর উপরেই tangent আঁকো (যদি খোঁচ বা ভাঙা থাকে, তবে চলবে না)। এবার এই tangent দুটোর মধ্যে যে কোণ হবে সেটাকেই বলা হয় curve দুটোর মধ্যে কোণ (Fig 63)।

বুঝতেই পারছ যে, দুটো curve-এর মধ্যে কোণ বার করার জন্য বেশ কয়েকটা ধাপ লাগে। কোনো কোনো বিশেষক্ষেত্রে অবশ্য কাজটা বেশ সহজ হয়ে যায়। আমরা সেরকম কিছু অংকই এখানে দেখব।

Example 38: Let $y = e^{x^2}$ and $y = e^{x^2}\sin x$ be two given curves. Then the angle between the tangents to the curves at any point of their intersection is

(A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

(JEE2015.60)
SOLUTION: এই অংকটা differentiate করে করা যায়, কিন্তু একটা ছোট্টো জিনিস লক্ষ করতে পারলে অনেক সহজে করে ফেলা যাবে। সেই ছোট্টো জিনিসটা হল--

> যেহেতু $\sin x \leq 1$, তাই দুটো curve-এর দেখা হবে একমাত্র যখন $\sin x = 1$ হবে। অন্য সব সময়েই দ্বিতীয়টা প্রথমটার নীচে থাকবে (যেহেতু $e^{x^2} > 0$)। তাই দ্বিতীয়টার পক্ষে প্রথমটাকে নীচে থেকে স্পর্শ করা ছাড়া আর অন্য পথ নেই।

সুতরাং ওই বিন্দুগুলোতে দুজনের tangent একই হবে। অতএব উত্তর হবে (A) আর (B). এখানে point of intersection কথাটা নিয়ে সাবধান। Intersection শুনেই কেমন মনে হয় যেন একটা curve ওই বিন্দুতে অন্যটাকে কেটে বেরিয়ে গেছে। কিন্তু সেই ধারণাটা সঠিক নয়। Point of interjection মানে খালি এমন একটা বিন্দু, যেটা দুটো curve-এর উপরেই আছে, ব্যস্!
আমরা এখানে অংকটা একটু কৌশল করে করলাম, $\sin x \leq 1$ ব্যবহার করে। সেটা যদি মাথায় না আসত, তবে অবশ্য differentiate করে করলেও খুব কঠিন কিছু হত না। সেটা এবার করে দেখাই।

বিকল্প পদ্ধতি

$y = e^{x^2}$-কে differentiate করলে পাবে
$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}.$$
অন্যটার বেলায় আসবে
$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x.$$
দুটো curve-এর মধ্যে দেখা হবে একমাত্র তখনই যখন $\sin x = 1$ (এবং তাই $\cos x = 0$)। সেটা বসালেই দেখবে দুই ক্ষেত্রেই $\frac{dy}{dx}$ একই আসছে। ■

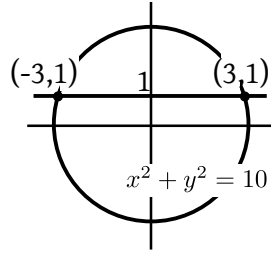
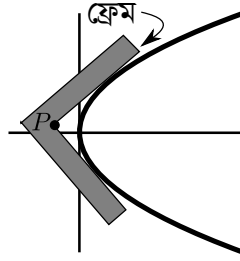



Fig 64 **Fig 65** **Fig 66**

Example 39: The angle of intersection between the curves $y = [|\sin x| + |\cos x|]$ and $x^2 + y^2 = 10$, where $[x]$ denotes the greatest integer $\leq x$, is

(A) $\tan^{-1} 3$ (B) $\tan^{-1}(-3)$ (C) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (D) $\tan^{-1}(1/\sqrt{3})$

(JEE2014.80)
SOLUTION: এখানে দুটো curve নিয়ে কাজ করতে হবে। তার মধ্যে $x^2 + y^2 = 10$-এর চেহারাটা আমাদের পরিচিত, একটা circle যার radius হল $\sqrt{10}$ এবং centre রয়েছে $(0,0)$-তে। কিন্তু অন্য curve-টার equation-এ $[|\sin x| + |\cos x|]$ দেখে একটু ভয় লাগতে পারে। কিন্তু আসলে ওটাও খুবই সহজ জিনিস। লক্ষ করো

$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 = 1 + |\sin 2x|.$$

তাই $|\sin x| + |\cos x| \in [1, \sqrt{2}]$. কী করে হল বুঝলে? না হলে ধাপে ধাপে দ্যাখো--

> $\sin 2x \in [-1,1]$, তাই $|\sin 2x| \in [0,1]$. সুতরাং $1 + |\sin 2x| \in [1,2]$, অর্থাৎ $\left(|\sin x| + |\cos x|\right)^2 \in [1,2]$. এবার positive square root নিলেই $|\sin x| + |\cos x| \in [1, \sqrt{2}]$, কারণ $|\sin x| + |\cos x| \geq 0$.

সুতরাং $[|\sin x| + |\cos x|]$ সব সময়েই 1. এবার যদি দুটো curve-এর ছবি আঁকি, তবে ব্যাপারটা Fig 64-এর মত হবে। খালি দুই জায়গায় curve দুটোর মোলাকাত হচ্ছে, জায়গা দুটো হল $(-3,1)$ আর $(3,1)$. সুতরাং উত্তরটা হবে এই দুটো বিন্দুতে circle-টার slope-এর $\tan^{-1}$. এই slope-টা বার করার জন্য $x^2 + y^2 = 10$-কে implicit differentiate করে পাব $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$, অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = -x/y$. সুতরাং $(x,y) = (-3,1)$ আর $(x,y) = (3,1)$ বসালেই উত্তর পাবে (A) আর (B). ■

এবার একটা অংক দেখব, যেটা বেশ প্যাঁচের।

Example 40: A particle P moves in the plane in such a way that the angle between the two tangents drawn from P to the curve $y^2 = 4ax$ is always $90°$. The locus of P is

(A) a parabola (B) a circle (C) an ellipse (D) a straight line.

(Bstat/Bmath2012short.10)
SOLUTION: এইরকম অংকে সবটা কষে ফেলতে গেলে অনেক সময় লেগে যায়। তাই ছবি দিয়েই যতটা সম্ভব করা উচিত। এখানে ছবিটা কল্পনা করো এইভাবে-- parabola-টা যেন জানালার গ্রিলের মত লোহা দিয়ে তৈরী। সেটার গায় আমরা একটা ফ্রেম ঝুলিয়ে নিচ্ছি, যার বাহু দুটো পরস্পরের সঙ্গে right angle-এ রয়েছে (Fig 65)। প্রথমেই লক্ষ করো যে, P বিন্দুর locus-টা x-axis বরাবর symmetric, কারণ parabola-টা নিজেই সেরকম। ব্যাপারটা ভালো করে বোঝার জন্য Fig 66 দেখে নাও। আরো লক্ষ করো যে, parabola-টার হাঁ-মুখের ভিতরে এরকম কোনো বিন্দু থাকতে পারে না, কারণ কোনো tangent-ই হাঁ মুখের মধ্যে ঢুকবে না, সবাই বাইরের গা ঘেঁষে বেরিয়ে যাবে। তারপর দ্যাখো যে x-axis-এর উপর

Fig 67

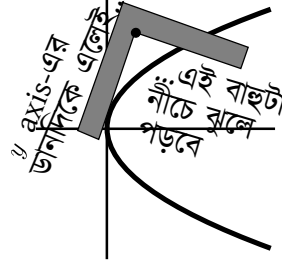



Fig 68

এরকম ঠিক একটাই বিন্দু সম্ভব (Fig 67)। এই কটা তথ্য থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে, (B) আর (C) হতে পারে না। কারণ x-axis বরাবর symmetric কোনো circle বা ellipse আঁকতে হলে সেটা x-axis-কে দুবার ছেদ করতে বাধ্য। তাহলে পড়ে রইল সরলরেখা নয়তো parabola. এবার একটু সতর্ক হয়ে ছবি আঁকলেই বুঝবে যে, বিন্দুটা y-axis-এর ডানদিকে হতে পারে না (Fig 68) সুতরাং parabola-ও বাদ গেল। পড়ে রইল (D).

বিকল্প পদ্ধতি

যদি এই আন্দাজি কায়দাটা তোমার মনঃপূত না হয় (বিশেষ করে ওই "সতর্ক হয়ে ছবি আঁকা"-র জায়গাটা), তবে অংক কষেও এগোনো যায়। এর জন্য parabola-টার যেকোনো বিন্দুতে tangent বার করতে পারা জরুরী। এখানে parabola-টা কোনো function-এর গ্রাফ নয়, তাই এমনি differentiation-এ কাজ হবে না। হয় implicit differentiation নয়তো parametric differentiation লাগাতে হবে। যেকোনোটাই লাগানো যায়, কিন্তু সাধারণতঃ parametric differentiation লাগানোই সহজ হয়, বিশেষতঃ যেখানে এই parabola-টাকে parametric আকারে লেখা খুবই সহজ--

$$x = at^2, \quad y = 2at, \text{ যেখানে } t \in \mathbb{R}$$

যেখানে $t \in \mathbb{R}$. চট্ করে parametric differentiation করে দ্যাখো--

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}, \quad t \neq 0.$$

এখানে $t \neq 0$ কেন এল, সেটা বুঝতেই পারছ, $t = 0$ হলে আমরা সেই বিন্দুটা পাবো, যেখানে parabola-টা মোড় ঘুরছে, তাই সেখানে tangent-টা vertical.

সুতরাং যদি t আর t' বিন্দুতে আঁকা tangent দুটো পরস্পরের সঙ্গে right angle-এ থাকে, তবে

$$\frac{1}{t} \times \frac{1}{t'} = -1.$$

এটা কেন হল বুঝলে তো? দুটো সরলরেখা পরস্পরের সঙ্গে right angle-এ থাকলে ওদের slope-এর গুণফল -1 হয়। সুতরাং $t' = -\frac{1}{t}$ হতে বাধ্য।

এবার আমরা tangent দুটোর equation বার করব। আসলে খালি t বিন্দুতে tangent-এর equation বার করাই যথেষ্ট। সেই equation-এ t-এর জায়গায় $-\frac{1}{t}$ বসিয়ে দিলেই অন্য equation-টা পেয়ে যাবে। যখন parameter-টার value হল t, তখন বিন্দুটা হবে $(at^2, 2at)$. তার মানে tangent-টা এমন একটা সরলরেখা যার slope হল $\frac{1}{t}$ আর যেটা এই বিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং tangent-টার equation হচ্ছে $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$, অর্থাৎ

$$y = at + \frac{x}{t}.$$

এর মধ্যে t-এর জায়গায় $-\frac{1}{t}$ বসালেই অন্য tangent-টাও পেয়ে যাবে--

$$y = -\frac{a}{t} - tx.$$

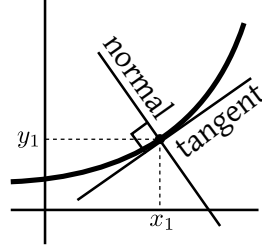
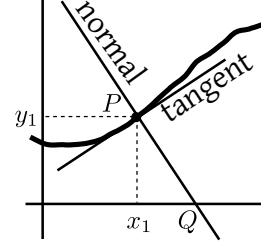



Fig 69 **Fig 70**

এরা কোথায় ছেদ করে সেটা বার করলেই দেখবে আসছে $x = -a$, যেটা t-এর উপর নির্ভর করে না। মানে এরকম যে দুটো বিন্দুতেই tangent আঁকো না কেন, ওরা ছেদ করবে $x = -a$ লাইনটার উপর কোথাও। সুতরাং এই সরলরেখাটাই হল locus-টা। ■

21.2 Normal

এতক্ষণ tangent-এর অনেক কথা হল। এবার বলি normal-এর কথা। কোনো curve-এর উপর কোনো বিন্দু (x_1, y_1)-এ **normal** মানে হল ওই বিন্দু দিয়ে যাওয়া এমন একটা সরলরেখা যেটা ওই বিন্দুতে tangent-এর সঙ্গে right angle করে আছে (Fig 69)। সুতরাং দুটো শর্ত--

- এক, tangent-এর সঙ্গে right angle-এ থাকতে হবে
- (x_1, y_1) দিয়ে যেতে হবে।

Normal বার করাও tangent বার করার মতই--

> tangent বার করার মতো করেই এগোও, differentiate করে m বার করা অব্দি। এবার normal-টার slope হবে $-\frac{1}{m}$. এখানে অবশ্য $m \neq 0$ হতে হবে। তা না হলে normal-টা vertical হয়ে যাবে। আমরা জানি যে, normal-টা (x_1, y_1) দিয়ে যায়। সুতরাং normal-টার equation হবে
>
> $$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1).$$

Example 41: Using calculus, show that the portion of the normal to the curve

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$$

at (x_1, y_1) intercepted between the curve and the x-axis is $\frac{y_1^2}{a}$.[4] **(HS2014.3evii)**

SOLUTION: অংকটার ভাষায় একটু ভুল আছে--বলেছে "the portion of the normal" বলা উচিত ছিল "the length of the portion of the normal." যাই হোক, আগে বুঝে নিই কী করতে বলেছে। একটা function দিয়েছে। তার গ্রাফটা আঁকা সহজ নাও লাগতে পারে, বস্তুতঃ গ্রাফটা আঁকার কোনো দরকারও নেই। খালি মাথাটা সাফ রাখার জন্য একটা ছবি আঁকা যাক (Fig 70) সাবধান, এটা খালি বোঝার সুবিধার জন্য যা খুশি একটা curve এঁকে দিয়েছি, এর সঙ্গে সত্যিকারের গ্রাফটার কোনো মিল নাও থাকতে পারে[4]! এবার এর উপরে একটা point নিতে বলেছে (x_1, y_1). এর নাম দিলাম P. সেখান দিয়ে normal-টা আঁকো, এবং দ্যাখো সেটা কোথায় x-axis-কে ছেদ করে (ধরো Q বিন্দুতে)। তাহলে তোমার কাজ হল এটা দেখানো যে, PQ-এর দৈর্ঘ্য হবে $\frac{y_1^2}{a}$.

ধাপে ধাপে এগোব। প্রথম ধাপে normal-এর equation-টা বার করি--

[4]আসল গ্রাফটা বাটির মত দেখতে।

✎The slope of the curve at any value of x is

$$\frac{dy}{dx} = \cdots = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}}{2}$$

So the slope of the normal is

$$-\frac{1}{dy/dx} = \frac{-2}{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}}.$$

At the point $P:(x_1, y_1)$ it is

$$\frac{-2}{e^{\frac{x_1}{a}} - e^{\frac{-x_1}{a}}} = m, \text{ say.}$$

Thus the equation of the normal to the curve at (x_1, y_1) is

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1).$$

এবার দ্বিতীয় ধাপ। এখানে আমরা Q-এর অবস্থান বার করব--

✎This line intersects the x-axis at $Q:(\alpha, 0)$ where

$$0 - y_1 = m \cdot (\alpha - x_1),$$

or $\alpha = x_1 - \frac{y_1}{m}$.

এবার শেষ ধাপ--

✎So the required length is PQ, which is

$$\sqrt{(\alpha - x_1)^2 + y_1^2} = \cdots = \frac{y_1^2}{a},$$

as required.

এখানে $\cdots$ মানে হল মাঝের মামুলী ধাপগুলো তোমার করার জন্য রেখে দিয়েছি। ■

Example 42: If the normal at any point to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ makes an angle ϕ with the x-axis, then prove that the equation of the normal is $y\cos\phi - x\sin\phi = a\cos 2\phi$.[5] **(HS2016.3bi)**

SOLUTION: একটা curve দিয়েছে। বার করতে হবে তার normal-এর equation. কাজটা কী করে করতে হয় আমরা জানি, কিন্তু এখানে একটা সমস্যা আছে। কোন্ বিন্দুতে normal-টা নেওয়া হচ্ছে সেটা বলে নি, বলেছে normal-টা কত কোণে হেলে আছে, খালি সেইটা। বিন্দুটা দেওয়া না থাকলে আমাদের normal বার করার কায়দাটা কাজ করবে না। তাই আমরাই বিন্দুটার একটা অবস্থান ধরে নেব--

✎Let the point on the curve where the normal is drawn be (x_1, y_1).

The slope of the normal is $\tan\phi$.

এখানে ধরে নিলাম যে, ϕ কোণটা হয়েছে positive x-axis-এর সঙ্গে।

✎Hence the equation of the normal is

$$y - y_1 = \tan\phi(x - x_1),$$

or

$$\cos\phi(y - y_1) = \sin\phi(x - x_1),$$

or

$$y\ \cos\phi - x\ \sin\phi = y_1\ \cos\phi - x_1\ \sin\phi.$$

এর মধ্যে x_1 আর y_1 আছে। কিন্তু যেটা প্রমাণ করতে বলেছে তার মধ্যে ওরা নেই। অতএব এবার আমাদের কাজ হবে x_1 আর y_1-কে ϕ দিয়ে প্রকাশ করা। আমরা প্রথমে উল্টোটা করব--ϕ-কে প্রকাশ করব x_1 আর y_1 দিয়ে।

✎Differentiating the equation of the curve at the point (x_1, y_1),

$$\tfrac{2}{3}\left(x_1^{-1/3} + y_1^{-1/3}y'\right) = 0.$$

or

$$y' = -\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{1/3}.$$

So the slope of the normal is

$$-\frac{1}{y'} = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{1/3} = \tan\phi.$$

তাহলে ϕ-কে x_1 আর y_1 দিয়ে লেখা গেছে। এবার x_1 আর y_1-কে লিখব ϕ দিয়ে। সেটার জন্য একটু কৌশল লাগবে। যেহেতু $\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$, তাই--

✎We have

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{1/3} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi},$$

or

$$\frac{x_1^{1/3}}{\sin\phi} = \frac{y_1^{1/3}}{\cos\phi} = k,\ \text{say}.$$

So $x_1^{1/3} = k\sin\phi$ and $y_1^{1/3} = k\cos\phi$, or $x_1 = k^3\sin^3\phi$ and $y_1 = k^3\cos^3\phi$.

আবার একটা উট্‌কো k ঢুকে গেল! ওটাকে পরে তাড়াতে হবে।

✎So the equation of the normal is

$$y - y_1 = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{1/3}(x - x_1),$$

or

$$y - k^3\cos^3\phi = \tan\phi(x - k^3\sin^3\phi) = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}(x - k^3\sin^3\phi),$$

এবার $\cos\phi$ দিয়ে দুপাশকে গুণ করে একটু সাজিয়ে লিখলেই পাবে--

✎or

$$y\cos\phi - x\sin\phi = k^3(\cos^4\phi - \sin^4\phi) = k^3(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{1} = k^3\cos 2\phi. \quad (*)$$

এবার k-টাকে তাড়াই--

✎Now, since (x_1, y_1) lies on the curve,

$$(k\sin\phi)^2 + (k\cos\phi)^2 = a^{2/3}.$$

So $k^2 = a^{2/3}$.

Assuming $a, k > 0$ we have $k^3 = a$. So the result follows from (*).

■

Answers

1. $2x + y = 20$, তাই $y = 20 - 2x$. সুতরাং area হল $xy = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$. এটাকে $f(x)$ বললে $f'(x) = 20 - 4x \lesseqqgtr 0$ যখন $x \gtreqqless 5$. তাই $x = 5$-এ maximum. এবার কিন্তু বাগানটা square হবে না। **2.** $t = 0$ হলে $\sec^2\theta$ হয়ে যাবে undefined. এখানে $9t + \frac{16}{t}$ হল decreasing. তাই minimum-টা হবে একেবারে ডান প্রান্তে। উত্তর হবে (A). **3.** খালি (C)-ই সঠিক। **4.** Global maximum নেই, গ্রাফটার দুহাত উপরে তোলা। **5.** 2 থেকে e পর্যন্ত উঠছে, e থেকে 5 পর্যন্ত নামছে। সুতরাং $2^{1/2}$ আর $5^{1/5}$-এর মধ্যে কে বড় দেখতে হবে। দুটোকেই $10 - thpower$-এ তুললে দেখবে $5^{1/5}$-ই বেশী ছোটো। তাই উত্তর হবে (C). **6.** (C). **7.** $x''(t) = 0$, $y''(t) = -g$. তাই force-টা হবে $(0, -mg)$, অর্থাৎ তীর হিসেবে আঁকলে নীচের দিকে মুখ করা একটা তীর পাবে, যার দৈর্ঘ্য mg. এর মধ্যে কোনো t নেই, অর্থাৎ force-টা সর্বদাই একই থাকছে। সহজ বুদ্ধিও সেটাই বলে, ঢিলটা ছোঁড়ার পর ওর উপর একমাত্র force হল ওর উপর পৃথিবীর আকর্ষণ, মানে ঢিলটার ওজন। সেটা mg এবং নীচের দিকে কাজ করছে। **7.** $f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$, তাই $f'(-1) = -5 < 0$, তাই (A) বাদ। $f''(x) = 12x^2 + 2$, যেটা সর্বদাই > 0. তাই গ্রাফটা হবে convex. যেহেতু $f(x)$ একটা polynomial যার degree হল 4, একটা even সংখ্যা, আর x^4-এর coefficient হল > 0, তাই গ্রাফটার দুহাত উপরে তোলা হবে। Convex বলে কোনো ঢেউ থাকবে না, খালি বাটির মত হবে। যেহেতু $f(-1) = 0$ আর $f'(-1) < 0$, তাই বাটিটা নামার পথে x-axis-কে ছেদ করছে $x = -1$-এ। তার পরে ওঠার পথে ঠিক একবারই ছেদ করবে $x = -1$-এর ডানদিকে কোথাও। তাই (B) আর (C)-ও বাদ। পড়ে রইল (D). সরাসরিও (D) দেখানো যায় এইভাবে--দেখা যাচ্ছে যে, $f'(-1) < 0$ আর $f'(0) > 0$. সুতরাং -1 থেকে 0-র মধ্যে কোথাও একটা $f'(x) = 0$ হতে বাধ্য। যেহেতু $f(x)$ হল convex, সুতরাং x-এর সেই value-তে ঠিক একটাই local minimum হতে বাধ্য।

Chapter IV
Limit, continuity ইত্যাদি

DAY 22
Differentiation-এর গভীরে (part 1)

দ্বিতীয় অধ্যায়ে আমরা কিছু ফর্মুলা শিখেছি derivative বার করার জন্য। সেগুলো ব্যবহার করে গত অধ্যায়ে প্রচুর অংকও করেছি। কিন্তু ফর্মুলাগুলো কোথা থেকে এল, সেটা বলিনি। এবার সেটা শিখব। তার আগে ফর্মুলাগুলো আরেকবার উল্লেখ করে নিই--

- কার derivative কে?

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$a^x \ (a>0)$	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$

- পুরোনো থেকে নতুন-- যদি $f(x), g(x)$ দুজনেই differentials হয়, আর a, b যেকোনো দুটো সংখ্যা হয়, তবে

$\frac{d}{dx}(af(x)+b) = af'(x)$	$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) = f'(x)-g'(x)$	$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x).$

22.1 চোখের আন্দাজে

আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়ে শিখেছিলাম গ্রাফকাগজে একটা সরলরেখার ছবি থেকে কী করে তার slope বার করতে হয়। এবার সেটা কাজে লাগবে। তাই একটু মনে করে নিই। ধরো সরলরেখাটা Fig 1-এর মত। এর উপর যে কোনো দুটো বিন্দু নাও। ছবিতে এরকম দুটো বিন্দু দেখিয়েছি (x_1, y_1) আর (x_2, y_2). তাহলে slope-টা হবে

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

এই জিনিসটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা পড়ো।

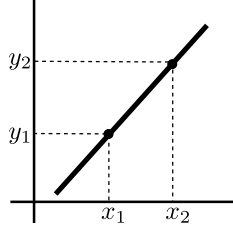
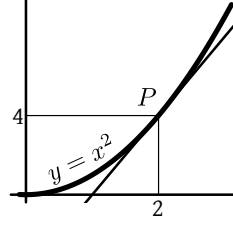
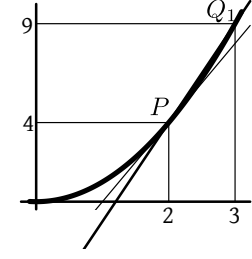



Fig 1 **Fig 2** **Fig 3**

Example 1: এই উদাহরণটার জন্য হাতের কাছে একটা ক্যালকুলেটর থাকলে সুবিধা হবে। Fig 2-এ $y = x^2$-র গ্রাফ এঁকেছি। এর উপরে $x = 2$-তে P বিন্দুটা রয়েছে। মানে P বিন্দুটা হল $(2, 2^2) = (2, 4)$. আমরা ফর্মুলা ব্যবহার করে derivative বার করলে হবে $\frac{dy}{dx} = 2x$. এর মধ্যে $x = 2$ বসালে slope-টা হবে 4. আমরা এবার দেখব, এই ম্যাজিক "$\frac{dy}{dx} = 2x$" ব্যবহার না করে খালি tangent-এর ধারণা কাজে লাগিয়ে একই উত্তরে পৌঁছনো যায় কিনা। বোঝার সুবিধার জন্য P বিন্দুতে tangent-টা এঁকেছি চোখের আন্দাজে। এর slope-টা বার করতে চাই। কিন্তু কোনো চোখের আন্দাজ ব্যবহার না করে। তার জন্য আমরা একটা কৌশল করব। এই কৌশলটা থেকেই differentiation-এর ফর্মুলাগুলো আসে। মনোযোগ দিয়ে পড়ো। প্রথমে গ্রাফটার উপরে আরেকটা বিন্দু নিতে হবে Q_1 যেটা $x = 2$-এর ডান দিকে কোথাও, ধরো $x = 3$-তে। Fig 3 দ্যাখো। PQ_1 যোগ করে একটা সরলরেখা টানো। ছবিতে মোটা করে দেখিয়েছি। যেহেতু এই সরলরেখাটা $(2, 2^2)$ এবং $(3, 3^2)$ বিন্দুদুটো দিয়ে যায়, তাই ওর slope হল

$$\frac{3^2 - 2^2}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5.$$

অবশ্যই এই সরলরেখাটা মোটেই tangent-টা নয়, কিন্তু তার কাছাকাছি কিছু একটা। এবার Q_1 থেকে P-এর আরেকটু কাছে এগিয়ে এসো, ধরো $x = 2.5$-এ গ্রাফের উপরের বিন্দুটা হল Q_2. এবার PQ_2 যোগ করো (Fig 4)। এই সরলরেখাটার slope হবে

$$\frac{2.5^2 - 2^2}{2.5 - 2} = 4.5.$$

এই সরলরেখাটাও tangent নয়, কিন্তু আগের সরলরেখাটার থেকে tangent-এর বেশী কাছে। এবার আরো কাছে এগিয়ে এসো, ধরো $x = 2.1$-এ Q_3. তাহলে PQ_3-এর slope হবে

$$\frac{2.1^2 - 4}{2.1 - 2} = 4.1.$$

এই সরলরেখাটা tangent-এর আরো বেশী কাছে। Fig 5 দ্যাখো। এখানে সরলরেখাটাকে tangent-এর থেকে প্রায় আলাদা করাই যাচ্ছে না।

Fig 4

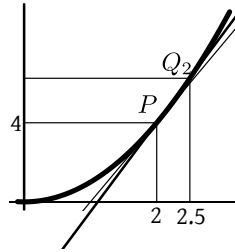



Fig 5

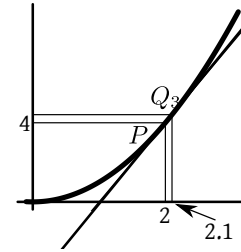
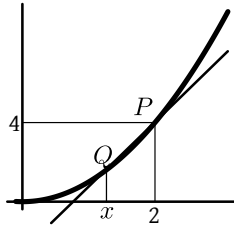



Fig 6

এইভাবে যদি আমরা যেকোনো $x > 2$-এর নিই, এবং x-এর সেই value-তে গ্রাফের উপরের বিন্দুটাকে Q বলি, তবে দেখব যে, x যতই 2-এর আরো আরো কাছে আসবে ততই PQ সরলরেখাটা tangent-টার সঙ্গে একেবারে মিশে যাবে। এইভাবে x-এর বিভিন্ন value-র জন্য ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নীচের টেবিলটা পেয়েছি।

x কত	PQ-এর slope
2.01	4.01
2.001	4.001
2.0001	4.0001
2.00001	4.00001
2.000001	4.000001

লক্ষ কর যে, x যতই 2-এর কাছে যাচ্ছে, slope-গুলো ততই ক্রমশঃ 4-এর কাছে এগিয়ে আসছে। একইভাবে, যদি বাঁদিক থেকে এগোতাম (Fig 6), তবে পেতাম নীচের টেবিলটা--

x কত	PQ-এর slope
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
1.9999	3.9999
1.99999	3.99999

এখানেও slope-গুলো ক্রমশঃই 4-এর দিকে এগোচ্ছে, যতই x-টা 2-এর দিকে এগোচ্ছে।
যদি আমরা $x = 2$ নিতাম, তবে কি slope-টা 4 পেতাম? না, তখন সেটা হয়ে যেত

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0},$$

যেটা আবার undefined.
কিন্তু সংখ্যাগুলো যেভাবে 4-এর দিকে এগোচ্ছে, সেটা থেকে আন্দাজ করা যাচ্ছে যে, tangent-টার slope-টা 4-ই হওয়া উচিত। ■

এখানে চোখের আন্দাজ লাগল না ঠিকই, কিন্তু তাও সংখ্যাগুলো দেখে আন্দাজ করতে হল কোন দিকে এগোচ্ছে।
এই একই অংক কোনোরকম আন্দাজ ছাড়াও করা যেত, তার জন্য একটা নতুন ধারণা লাগবে, যার নাম limit. সেটাই আমাদের পরবর্তী আলোচ্য বিষয়।

22.2 Limit

Example 2: আবার $y = x^2$-এর গ্রাফ নিয়ে কাজ করব। তার উপর P বিন্দুটা নাও আগের মতই।

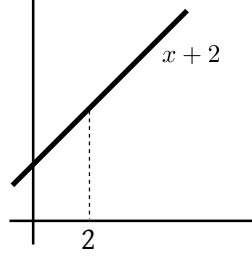
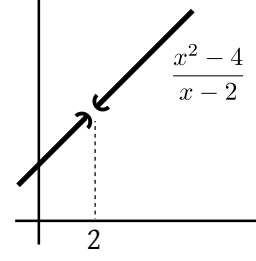



Fig 7 **Fig 8**

- প্রথমে যা খুশি একটা $x \neq 2$ নাও। তার জন্য গ্রাফের যে বিন্দুটা পাবে, তাকে Q নাম দাও। এই অব্ধি আগের মতই (Fig 6)।
- দ্বিতীয় ধাপে কিন্তু আমরা মোটেই আগের মত ক্যালকুলেটর ব্যবহার করব না, পুরোটাই অংক কষে এগোব। লক্ষ করো, PQ সরলরেখার slope হবে

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{x-2} &= \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\\ &= x+2,\end{aligned}$$

যেহেতু $x \neq 2$, তাই $x-2$ দিয়ে ভাগ করতে কোনো আপত্তি নেই। সুতরাং slope-টা দাঁড়াচ্ছে $x+2$.

এবার দ্বিতীয় ধাপের এই ফর্মুলাটায় যদি $x=2$ বসিয়ে দিই, তবে সত্যিই 4-ই পাওয়া যাচ্ছে! সমস্যা হল, এভাবে তো আর $x=2$ বসিয়ে দেওয়া যায় না, কারণ প্রথম ধাপে $x \neq 2$ ধরে না নিলে তো slope-টা লেখাই যেত না, তাই দ্বিতীয় ধাপে আসতেই পারতাম না। এইখানে আমরা একটু গ্রাফ এঁকে বুঝব $x+2$ আর $\frac{x^2-4}{x-2}$-এর মধ্যে পার্থক্যটা কোথায়। প্রথমে $x+2$-এর গ্রাফটা আঁকি। সেটা দেখতে Fig 7-এর মত। আর যদি $\frac{x^2-4}{x-2}$-এর গ্রাফটা আঁকি, তবে সেটাও কি একই ছবি হবে? উত্তর হল--না, যখন $x \neq 2$ থাকবে তখন একই হবে, কিন্তু $x=2$-তে $x+2=4$ আর $\frac{x^2-4}{x-2}$ =undefined. সুতরাং $\frac{x^2-4}{x-2}$-এর গ্রাফটা হবে Fig 8-এর মত। লক্ষ করো এটা ঠিক Fig 7-এর মতই, খালি একটা বিন্দু লোপাট হয়ে গেছে, ফলে দুটো প্রান্ত শূন্যে ঝুলছে। ■

এই দুটো প্রান্তের উচ্চতাকে বলে দুটো limit, বাঁদিকের প্রান্তটার উচ্চতার নাম হল **left hand limit**, আর ডান দিকেরটার উচ্চতার নাম **right hand limit**. এখানে দুটো প্রান্তেরই উচ্চতা হল 4. আমরা লেখার সময়ে left hand limit-টাকে লিখি

$$\lim_{x\to 2-} \frac{x^2-4}{x-2} = 4. \tag{1}$$

এখানে $x \to 2$ মানে হল x যাচ্ছে 2-এর দিকে। আর 2-টার ঠিক পরেই একটা মাইনাস চিহ্ন থাকার মানে হল x বাঁদিক থেকে 2-এর দিকে এগোচ্ছে। একইভাবে right hand limit-টাকে লিখি

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x^2-4}{x-2} = 4. \tag{2}$$

দেখতে ঠিক আগেরটার মতই, খালি $x \to 2$-এর পরে মাইনাসের বদলে প্লাস চিহ্ন, এই যা তফাত।
এই উদাহরণে দুই দিকের limit-ই হল 4, কারণ ঠিক একটাই বিন্দু উড়ে গেছে গ্রাফটা থেকে, তাই দুটো প্রান্তই ঠিক 4-এর সামনে এসে মুখোমুখি ঝুলে আছে। যেহেতু এখানে দুটো দিকের limit-ই সমান, তাই আমরা আলাদা করে left বা right উল্লেখ না করে খালি **limit**-ও বলতে পারি, এবং লিখি

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4. \tag{3}$$

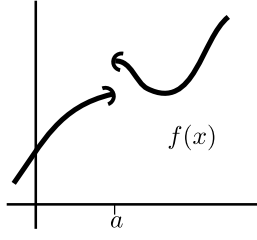
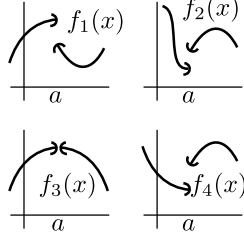
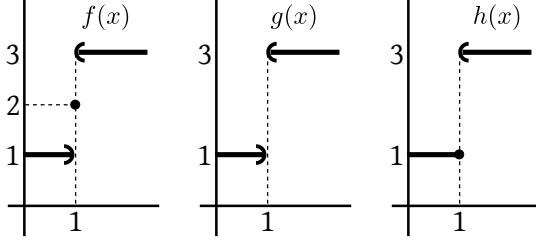



Fig 9 **Fig 10** **Fig 11**

এখানে আমরা খালি $x \to 2$ লিখেছি, 2-এর পর কোনো প্লাস বা মাইনাস দিইনি। মনে রেখো যে, (**3**) হওয়া মানে (**1**) আর (**2**) দুটোই একসঙ্গে হওয়া।
Limit-এর ধারণাটা একেবারে নতুন জিনিস, তাই ধীরে ধীরে কয়েকটা উদাহরণ দিয়ে হজম করা যাক।

Example 3: Fig 9-এর গ্রাফটা দ্যাখো। বলো তো এখানে $x = a$-তে left hand limit আর right hand limit কি সমান, মানে $\lim_{x\to a-} f(x)$ আর $\lim_{x\to a+} f(x)$ কি সমান?
SOLUTION: না, সমান নয়, কারণ দুটো প্রান্ত এখানে মুখোমুখি নেই। এখানে $\lim_{x\to a-} f(x) < \lim_{x\to a+} f(x)$. ■

Exercise 1: Fig 10-এ চারটে function-এর গ্রাফ দেখানো আছে। প্রতি ক্ষেত্রে তোমাকে বলতে হবে $x = a$-তে left hand limit আর right hand limit সমান কিনা, এবং অসমান হলে কে বড়। ■

Example 4: এই তিনটে function নাও

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \\ 3 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 1 \\ 3 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \\ 3 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

প্রতি ক্ষেত্রে $x = 1$-এ function-টার value এবং left hand limit আর right hand limit বার করো।
SOLUTION: প্রথমে এই তিনটে function-এর গ্রাফ এঁকে নেওয়া যাক। Fig 11 দ্যাখো। লক্ষ করো যে, এই তিনটে function-ই প্রায় একই জিনিস, তফাত খালি $x = 1$-এ কী হচ্ছে, সেখানে। দেখাই যাচ্ছে যে, $f(1) = 2$, $h(1) = 1$, কিন্তু $g(1)$ হল undefined. যদিও $x = 1$-এ ওদের তিনজনের value-তে পার্থক্য আছে, কিন্তু তা বলে $x = 1$-এ ওদের বাঁ দিকের প্রান্তগুলোর মধ্যে কোনো পার্থক্য নেই। সেগুলোর উচ্চতা প্রতিক্ষেত্রেই 1. একইভাবে ডান দিকের প্রান্তগুলোর উচ্চতাও প্রতিক্ষেত্রেই 3. তাই

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1-} h(x) = 1,$$

এবং

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} g(x) = \lim_{x\to 1+} h(x) = 3.$$

■

এই অংকটা থেকে শিক্ষণীয় এই যে, x-এর কোনো value-তে limit বার করার জন্য সেই value-তে function-টার value জানার কোনো দরকার নেই। এমন কি function-টা সেখানে undefined-ও হতে পারে।
এই ব্যাপারটাই আমরা কাজে লাগাব আমাদের tangent-এর অংকে। মনে আছে নিশ্চয়ই আমরা $y = x^2$-এর গ্রাফে $x = 2$-তে slope বার করার চেষ্টা করছিলাম। সেই প্রসঙ্গে এই function-টা এসেছিল--

$$\frac{x^2-4}{x-2} \text{ যেখানে } x \neq 2.$$

আমাদের ইচ্ছাটা ছিল এতে $x = 2$ বসিয়ে 4 উত্তর পাওয়া, কিন্তু সেটা গোঁজা ছাড়া সম্ভব হচ্ছিল না। এখানেই limit-এর বাহাদুরি। আমরা এই function-এ $x = 2$ বসাব না, আমরা $x = 2$-এ function-টার limit নেব। সেটা আমরা আগেই দেখেছি যে 4 হচ্ছে--

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

এটাকেই আমরা derivative-এর সংজ্ঞা বলে নেব। মানে general সংজ্ঞাটা দাঁড়াল--

DEFINITION: Derivative

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be any function. Let $a \in \mathbb{R}$ be any number. Then $f(x)$ is called **differentiable** at $x = a$ if the limit

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

exists finitely. The limit is called the **derivative** of $f(x)$ at $x = a$. It is denoted by $f'(a)$.
If the limit does not exist finitely, then we say that $f(x)$ is not differentiable at $x = a$.

যদিও এই সংজ্ঞায় আমরা ধরে নিয়েছি যে, f-এর domain হল পুরো $\mathbb{R}$, কিন্তু সেটা না হলেও চলে। যেটা দরকার সেটা হল এই--যদি $x = a$-তে $f(x)$-কে differentiate করতে চাও, তবে যেন $x = a$-র বাঁদিকে আর ডানদিকে খানিক দূর পর্যন্ত যেন $f(x)$-টা defined হয়। যেমন যদি $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ হয়, তবে $x = 0.1$-এ differentiate করতে অসুবিধা নেই। ওই "খানিকটা জায়গা"-র দরকার হল limit-টা নেওয়ার জন্য। প্লেন ওড়ার আগে যেমন খানিকটা রানওয়ে ধরে ছুটতে হয়, তেমনি $x = a$-তে left hand limit নেবার জন্য $x = a$-র বাঁদিকে খানিকটা জায়গা লাগে, যাতে x-টা a-র বাঁদিক থেকে a-র দিকে এগোতে পারে। তেমনি right hand limit-এর জন্য ডানদিকে খানিকটা জায়গা চাই।
অবশ্য যদি এই সংজ্ঞায় $\lim_{x\to a}$-র বদলে $\lim_{x\to a-}$ নাও, তবে খালি বাঁদিকে খানিকটা জায়গা হলেই চলবে। সেক্ষেত্রে আমরা পাবো $x = a$-তে $f(x)$-এর **left hand derivative**

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

যদি $\lim_{x\to a+}$ নিতে, তবে পেতে **right hand derivative**.
এইসব সংজ্ঞা নিউটন এবং লাইব্নিৎজ্ তৈরী করেছিলেন যাতে tangent-এর slope বার করবার সময়ে $0/0$ জাতীয় জিনিস এড়ানো যায়।

আমরা differentiate করার যে ম্যাজিক ফর্মুলাগুলো শিখেছিলাম, সেগুলো সবই আসে এই সংজ্ঞাটার limit-টা থেকে। Limit-টা বার করার বিভিন্ন কায়দা আছে। তাদের একজনের পরিচয় এবার আমরা নেব, যেখান থেকে $x^2, x^3, \ldots$ ইত্যাদিদের differentiate করার ম্যাজিক ফর্মুলাটা আসে। ফর্মুলাটা মনে আছে নিশ্চয়ই--

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

এবার দেখব এটা সংজ্ঞা থেকে কী করে এসেছে।

22.3 Limit থেকে ম্যাজিক ফর্মুলা

আবার আমরা $f(x) = x^2$ নিয়ে শুরু করি।

Example 5: $f(x) = x^2$-কে $x = a$-তে differentiate করো, যেখানে $a \in \mathbb{R}$ যা খুশি হতে পারে।

SOLUTION: সংজ্ঞা লাগালে হবে

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

এখানেও আগের মতই ব্যাপার-- $x \neq a$ হলে $\frac{x^2-a^2}{x-a} = x + a$ আর $x = a$ হলে undefined. সুতরাং গ্রাফটা হল $x + a$-র গ্রাফটাই, খালি $x = a$-তে বিন্দুটা লোপাট। সুতরাং সেই লোপাট বিন্দুটার উচ্চতাই হল আমাদের limit-টা, মানে $x + a$-তে $x = a$ বসালে যা হয়, অর্থাৎ $a + a = 2a$.
সুতরাং যেকোনো $a \in \mathbb{R}$-এর জন্যই $f'(a) = 2a$, বা a-র বদলে x অক্ষর ব্যবহার করলে $f'(x) = 2x$. আমাদের ম্যাজিক ফর্মুলা থেকেও ঠিক এটাই আসে। ■

একই কায়দায় x^3-কে differentiate করার ম্যাজিক ফর্মুলাও বার করতে পারবে। সেটাই চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Exercise 2: $f(x) = x^3$-কে differentiate করো $x = a$-তে। এখানে $a \in \mathbb{R}$ হল যে কোনো সংখ্যা। উত্তরটা কী হওয়া উচিত, সে তো আমরা জানিই, আমাদের ম্যাজিক ফর্মুলা বলছে $f'(x) = 3x^2$. সুতরাং $x = a$-তে উত্তর হওয়া উচিত $f'(a) = 3a^2$. দ্যাখো, এবার আমাদের সংজ্ঞাটা ব্যবহার করে কোনো ম্যাজিক ছাড়াই একই উত্তর পাও কিনা।
HINT:
একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। এখানে সংজ্ঞা লাগালে পাওয়া যাচ্ছে--

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}.$$

এবার এই জিনিসটা কাজে লাগবে $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$. এটা ব্যবহার করলেই দেখবে $x \neq a$ হলে $\frac{x^3-a^3}{x-a} = x^2 + ax + a^2$, আর যদি $x = a$ হয়, তবে undefined. সুতরাং $\frac{x^3-a^3}{x-a}$-এর গ্রাফটা হল আসলে $x^2 + ax + a^2$-এরই গ্রাফ, খালি $x = a$-তে যে বিন্দুটা থাকার কথা ছিল, সেটা লোপাট হয়ে গেছে। সুতরাং এবার limit-টা বার করে ফেলতে পারা উচিত। ■

Exercise 3: একই কায়দায় দেখাও যে $f(x) = x^n$ হলে যে কোনো $a \in \mathbb{R}$-এর জন্যই $f'(a) = na^{n-1}$ হয়।
HINT:
এখানে মনে রেখো যে

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

■

DAY 23
Differentiation-এর গভীরে (part 2)

23.1 Continuous

সংজ্ঞা দিয়ে derivative বার করতে গেলে বার বারই একইরকম একটা ব্যাপার আসছিল, একটা কোনো গ্রাফের থেকে ঠিক একটা বিন্দু লোপাট হয়ে যাচ্ছিল, ফলে দুটো প্রান্ত মুখোমুখি শূন্যে ঝুলছিল। যদি ওই লোপাট বিন্দুটা ফিরিয়ে দেওয়া যায়, তবে আর ওখানটায় কোনো ভাঙা থাকে না। অর্থাৎ গ্রাফটা আঁকতে ওখানে পেন তোলার দরকার হবে না, একটানা আঁকা যাবে। যদি কোনো function-এর গ্রাফ আঁকতে কোনো জায়গায় পেন তুলতে না হয়, তবে আমরা বলি যে, function-টা ওখানে **continuous**. একটা উদাহরণ নেওয়া যাক।

Example 6: Fig 12-এ $f(x) = 2x$-এর গ্রাফ দেখিয়েছি। এটাকে চাইলে আমরা Fig 13-এর মত করেও ভাবতে পারি

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \\ 2x & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

এইভাবে ভাবলে বুঝবে যে, এখানেও $x = 1$-এ দুটো মুখোমুখি প্রান্ত আছে (2 উচ্চতায়), কিন্তু মাঝের বিন্দুটা ঠিক জায়গা মত ফিট্ করে যাওয়ায় ওরা ঝুলে নেই, এই যা। তাই এখানেও আমরা বলব

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 2 \text{ এবং } \lim_{x \to 1+} f(x) = 2.$$

যেহেতু দুটো limit-ই সমান, তাই বলতে পারি

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

এদিকে $f(1)$-এর value-ও ঠিক এরই সমান (কারণ বিন্দুটা ঠিক জায়গা মত ফিট্ করে বসে আছে)। ■

যেসব function-এর গ্রাফে কোনো ভাঙা থাকে না, তাদের নিয়ে কাজ করার সুবিধা অনেক, কারণ এখানে limit বার করার জন্য আলাদা করে খাটতে হয় না, function-এর value-টাই limit হয়। এই ব্যাপারটা দিয়েই আমরা continuous function-এর সংজ্ঞাটা লিখব।

Fig 12

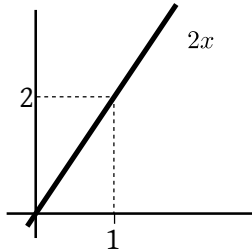



Fig 13

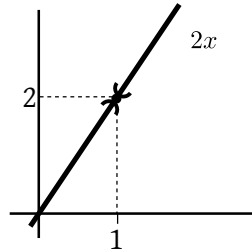
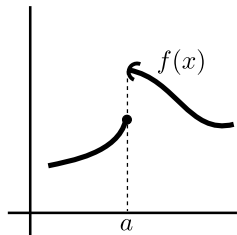



Fig 14

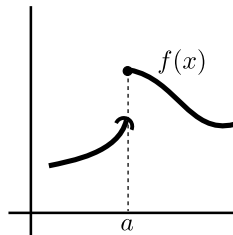



Fig 15

Definition: Continuous

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function. Let $a \in \mathbb{R}$ be any number. We say that $f(x)$ is continuous at $x = a$ if

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

If a is any number in the domain of f, and $f(x)$ is not continuous at $x = a$, then we say that $f(x)$ is **discontinuous** at $x = a$.

যদি একটা function তার domain-এর সর্বত্রই continuous হয়, তবে তাকে বলব **continuous function**.

Limit-এর বেলায় যেমন left hand limit আর right hand limit হয়, continuous-এর বেলাতেও তেমনি left continuous আর right continuous বলে দুটো জিনিস আছে। যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটা function হয়, আর কোনো $a \in \mathbb{R}$ নিই, তবে $x = a$-তে $f(x)$-এর continuous হওয়া মানে দুটো শর্ত পালিত হওয়া--

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \text{ আর } \lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

এদের মধ্যে বাঁদিকের শর্তটা পালিত হলে (ডানদিকেরটা হোক বা না হোক), আমরা বলব $f(x)$-টা $x = a$-তে **left continuous**. একইভাবে ডানদিকের শর্তটা পালিত হলে (বাঁদিকেরটা হোক বা না হোক) বলব $f(x)$-টা $x = a$-তে **right continuous.** ব্যাপারটা ছবি দেখে বুঝে নাও। Fig 14-এর বেলায় $f(x)$-টা $x = a$-তে left continuous, কিন্তু right continuous নয়। Fig 15-এ right continuous, কিন্তু left continuous নয়। Fig 16-এ left continuous-ও বটে, right continuous-ও বটে, তাই continuous. আর Fig 17-এ left বা right কোনোটাই নয়।

বিভিন্ন continuous function-এর সঙ্গে তো আগেই পরিচয় হয়েছে। এখানে একটা টেবিল করে মনে করিয়ে দিই, এরা domain-এর সর্বত্রই continuous–

Fig 16

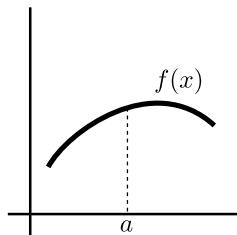
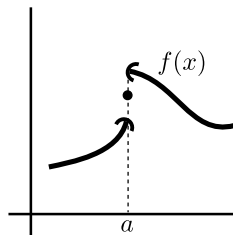



Fig 17

Function	Domain
constant	$\mathbb{R}$ $x^n, \quad n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\|x\|$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$
$\log_e x$	$(0, \infty)$
$\sin x, \ \cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x, \ \sec x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{(2n+1)\pi}{2} \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$
$\cot x, \ \mathrm{cosec}\, x$	$\mathbb{R} \setminus \{n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$

সবশেষে একটা function-এর কথা মনে করিয়ে দিই, যেটা continuous নয়--

- $[x]$ এমন একটা function, যেটা গোটা $\mathbb{R}$-এর উপরেই defined, কিন্তু ঠিক integer-গুলোতে discontinuous.

আরো মনে রেখো যে, দুটো continuous function-কে যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করলে যেসব নতুন function পাওয়া যায়, তারাও সবাই continuous হয়। খালি ভাগের বেলায় সাবধান থাকতে হবে যেন নীচের তলায় শূন্য না এসে যায়। একটা continuous function-এর পেটে আরেকটা continuous function ঢোকালেও নতুন function-টা continuous-ই হয়।

Example 7: If $f(x) = \begin{cases} x + \sin x & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$, examine whether $f(x)$ is continuous at $x = 0$.[3]

(HS2014.4ci)

SOLUTION: আমাদের কাজ হল তিনটে জিনিসের তুলনা করা, $f(0)$, $\lim_{x\to 0-} f(x)$ আর $\lim_{x\to 0+} f(x)$.

✎Here $f(0) = 0$.

$x = 0$-র ডানদিকে তো $f(x)$-টা constant function, 0.

✎Also $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

Now $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(x + \sin x) = 0 + \sin 0 = 0$, since x and $\sin x$ are continuous functions, and so is $x + \sin x$.

$\because \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0)$,

$\therefore f(x)$ is continuous at $x = 0$.

■

Example 8:

$$f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & \text{if } x \neq 2 \\ \lambda & \text{if } x = 2 \end{cases}$$

If $f(x)$ is continuous at $x = 2$, then value of λ will be

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 2

(JEE2011.77)

SOLUTION: মনে রেখো যে $[x]$ কখনো দুটো পরপর integer-র মাঝখানে value বদলায় না। আমাদের কাজ করতে হবে $x = 2$-তে। তার আগের integer হল 1 আর পরের integer হল 3. সুতরাং $x \in (1, 2)$ হলে কী হয় প্রথমে দেখি।

তখন $[x] = 1$ আর $[-x] = -2$. তাই $f(x) = -1$ সুতরাং $\lim_{x\to 2-} f(x) = -1$. আমরা জানি যে, continuous হবার জন্য $f(2) = \lim_{x\to 2-} f(x)$ চাই, তাই $\lambda = -1$ লাগবে। একইভাবে $\lim_{x\to 2+} f(x) = -1$ পাবে। সুতরাং উত্তর হল (A). ■

এখানে একটা সহজ বুদ্ধির জিনিস মনে করিয়ে দিই। কোনো বিন্দুতে যদি একটা function দ্যাখো differentiable হচ্ছে, তবে অবশ্যই সেখানে ভাঙা নেই। এটাকেই যদি অংকের গালভরা ভাষায় লেখো, তবে পাবে--

THEOREM

If a function $f(x)$ is differentiable at some value of x, then $f(x)$ must also be continuous there.

এবার একটা অংক দেখি যেটা কষতে খালি differentiation আর continuous-এর সংজ্ঞা ছাড়া আর কিছুই লাগবে না।

Example 9: Suppose that $f(x)$ is a differentiable function such that $f'(x)$ is continuous, $f'(0) = 1$ and $f''(0)$ does not exist. Let $g(x) = xf'(x)$. Then

(A) $g'(0)$ does not exist. (B) $g'(0) = 0$ (C) $g'(0) = 1$ (D) $g'(0) = 2$

(JEE2014.55)

SOLUTION: এই অংকটা প্রথমে দেখলে বেশ ভয় লাগতে পারে। কিন্তু এর মধ্যে জটিলতা কিছুই নেই। আমাদের কাজ করতে বলেছে $g'(0)$ নিয়ে। তার সংজ্ঞাটা মনে করে নিই--

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

এর মধ্যে $g(x)$-টা বলে দিয়েছে, $g(x) = xf'(x)$. সুতরাং $g(0) = 0 \times f'(0) = 0$. তাই

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)}{x}.$$

লক্ষ করো যে, $x \neq 0$ হলে $\frac{xf'(x)}{x} = f'(x)$. অতএব $f'(x)$-র গ্রাফটা এঁকে $x = 0$-র বিন্দুটা লোপাট করে দিলেই $\frac{xf'(x)}{x}$-এর গ্রাফটা পাওয়া যায়। সুতরাং--

$$\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f'(x).$$

কিন্তু $f'(x)$ তো বলে দিয়েছে continuous. তাই এই limit-টা হবে স্রেফ $f'(0) = 1$.
তার মানে উত্তর হল (C). ■

23.2 দু দিকে দুইরকম function

আমরা দুটো function-কে মিলিয়ে নতুন function বানানোর নানারকম কায়দা শিখেছি, যেমন যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ করে, বা composition নিয়ে। এবার আরেকটা কায়দা শিখব, যেটা অনেক সময়েই কাজে লাগে। ধরো দুটো function আছে $\ell(x)$ আর $r(x)$, যারা সর্বত্র differentiable. এবার কোনো একটা সংখ্যা a নিয়ে $\ell(x)$ আর $r(x)$-কে এইভাবে মেলাও--

$$f(x) = \begin{cases} \ell(x) & \text{if } x < a \\ r(x) & \text{if } x \geq a \end{cases},$$

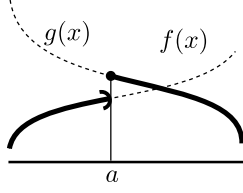
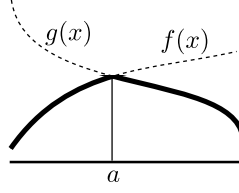
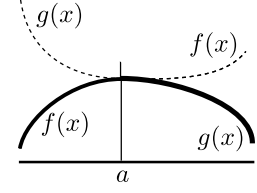



Fig 18 **Fig 19** **Fig 20**

মানে $x = a$-এর বাঁদিকে $\ell(x)$ আর ডানদিকে $r(x)$ নিয়েছি[1]। এই জন্যই ℓ আর r অক্ষরদুটো নিয়েছি, left-এর ℓ আর right-এর r.

এইভাবে যে $f(x)$-টা পেলাম, সেটা কি differentiable হবে? যদি a ছাড়া x-এর অন্য কোনো value নাও, তবে তো হবেই, কারণ $\ell(x)$ আর $r(x)$ দুজনেই সর্বত্র differentiable বলাই আছে। কিন্তু $x = a$-তে differentiable হবে কিনা, সেটা নির্ভর করবে ওইখানে $\ell(x)$ আর $r(x)$ গ্রাফদুটো মসৃণভাবে মিশছে কিনা, নাকি ভাঙা বা খোঁচ হয়ে থাকছে, তার উপরে। যদি $\ell(a) \neq r(a)$ হয়, তবে ভাঙা থাকবে (Fig 18)। যদি $\ell(a) = r(a)$ কিন্তু $\ell'(a) \neq r'(a)$ হয় (Fig 19), তবে ভাঙা থাকবে না, কিন্তু খোঁচ হবে। যদি $\ell(a) = r(a)$ এবং $\ell'(a) = r'(a)$ হয় (Fig 20), তবে মসৃণ হবে, এবং সেক্ষেত্রে $\ell'(a) = r'(a)$-ই হবে $f'(a)$.

Example 10: তিনটে function দিলাম নীচে, এদের derivative বার করো।

$$f_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{if } x < 0 \\ x+1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} e^x & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} e^x & \text{if } x < 0 \\ 2x+1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

SOLUTION: এখানে প্রতিটা function-এরই বাঁদিকের অংশটা হল $\ell(x) = e^x$. প্রথম জনের ডানদিকে আছে $r_1(x) = x + 1$.

লক্ষ করো যে $\ell(0) = 1 = r_1(0)$, সুতরাং ভাঙা নেই। আবার $\ell'(0) = 1 = r_1'(0)$, তাই খোঁচও নেই। সুতরাং

$$f_1'(x) = \begin{cases} e^x & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}.$$

কিন্তু $f_2(x)$-এর বেলায় ডানদিকের অংশটা হল $r_2(x) = x$. এখানে $\ell(0) \neq r_2(0)$, তাই ভাঙা আছে। ফলে--

$$f_2'(x) = \begin{cases} e^x & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}.$$

লক্ষ করো যে, $f_2'(0)$ কিন্তু undefined.

একইভাবে $f_3(x)$-এর বেলায় ডানদিকের অংশটা হল $r_3(x) = 2x + 1$. এখানে $\ell(0) = r_3(0)$, তাই ভাঙা নেই, কিন্তু $\ell'(0) \neq r_3'(0)$, তাই খোঁচ আছে। এখানে

$$f_3'(x) = \begin{cases} e^x & \text{if } x < 0 \\ 2 & \text{if } x > 0 \end{cases}.$$

এখানেও $f_3'(0)$ হল undefined. ■

Example 11: Let

[1] এখানে $x \leq a$ আর $x > a$ নিলেও চলত।

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{if } x < 2 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 2 & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$

Then

(A) $\lim_{x\to 2} f(x)$ does not exist.

(B) f is not continuous at $x = 2$

(C) f is continuous but not differentiable at $x = 2$

(D) f is continuous and differentiable at $x = 2$

(JEE2013.7)
SOLUTION: এখানে বাঁদিকের অংশটা হল $\ell(x) = x^3 - 3x + 2$ আর ডানদিকের অংশটা $r(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$. দুজনেই polynomial, তাই সর্বত্র differentiable.
$\ell(2) = 2^3 - 3 \times 2 + 2 = 4$.
আবার $r(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 9 \times 2 + 2 = 4$.
সুতরাং $x = 2$-তে $f(x)$ অবশ্যই continuous. তাই প্রথম দুটো বাদ হয়ে গেল। এবার দেখতে হবে differentiable হচ্ছে কিনা।
লক্ষ করো যে, $\ell'(x) = 3x^2 - 3$ আর $r'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
সুতরাং $\ell'(0) = 3 \times 2^2 - 3 = 9$ এবং $r'(0) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 9 = -3 \neq 9$.
সুতরাং differentiable নয়। অতএব উত্তর হল (C). ■

Example 12: Suppose $n \geq 2$ is a fixed positive integer and $f(x) = x^n|x|,\ x \in \mathbb{R}$. Then

(A) f is differentiable everywhere only when n is even

(B) f is differentiable everywhere except at 0 if n is odd

(C) f is differentiable everywhere

(D) none of the above is true.

(Bstat/Bmath2012short.22)
SOLUTION: এখানে

$$f(x) = \begin{cases} -x^{n+1} & \text{if } x < 0 \\ x^{n+1} & \text{if } x \geq 0 \end{cases}.$$

এখানে বাঁদিকের অংশটা হল $\ell(x) = -x^{n+1}$ আর ডানদিকের অংশটা হল $r(x) = x^{n+1}$. দুজনেই আলাদা করে দিব্যি differentiable. এখানে $\ell(0) = r(0)$, তাই $f(x)$-টা অবশ্যই continuous.
আবার $\ell'(0) = 0$ আর $r'(0) = 0$. সুতরাং উত্তর হল (C).
লক্ষ করো যে, এখানে $n \geq 2$ শর্তটা লাগল না, $n > 0$ হওয়াই যথেষ্ট। ■

Example 13: The function $f(x) = a \sin|x| + be^{|x|}$ is differentiable at $x = 0$ when

1. $3a + b = 0$
2. $2a - b = 0$

3. $a+b=0$

4. $a-b=0$

(JEE2014.45)
SOLUTION: এখানেও বাঁদিক-ডানদিক করে ভেঙে নেব--

$$f(x)=\begin{cases} a\sin(-x)+be^{-x} & \text{if } x<0 \\ a\sin x+be^{x} & \text{if } x\geq 0 \end{cases}.$$

বাঁদিকে আছে $\ell(x)=a\sin(-x)+be^{-x}$ আর ডানদিকে $r(x)=a\sin(x)+be^{x}$. এরা দুজনেই সর্বত্র differentiable (কারণ differentiable function জুড়ে জুড়ে তৈরী)।
চট্ করে দেখে নাও যে $\ell(0)=r(0)$ হচ্ছে। অতএব $f(x)$-এর continuity নিয়ে কোনো সমস্যা নেই।
লক্ষ করো, $\ell'(x)=-a\cos(-x)-be^{-x}$ আর $r'(x)=a\cos(x)+be^{x}$. সুতরাং $\ell'(0)=-a-b$, আর $r'(0)=a+b$. তাই $x=0$-তে differentiable হবার জন্য চাই $-a-b=a+b$, অর্থাৎ $a+b=0$. সুতরাং উত্তর হল (C). ■

Example 14: Let α be a real number. Consider the function

$$g(x)=(\alpha+|x|)^2e^{(5-|x|)^2}, \quad -\infty<x<\infty.$$

(i) Determine the values of α for which g is continuous at all x.
(ii) Determine the values of α for which g is differentiable at all x. **(Bstat/Bmath2012long.2)**
SOLUTION:

✎(i) We know that sum, product and composition of continuous functions are continuous. Also $e^x, |x|, x^2$ and constant functions are all continuous. So the given function is continuous for all values of α.

এবার দুটো কেসে ভেঙে লিখব--

✎(ii) We can write the function as

$$g(x)=\begin{cases} \ell(x) & \text{if } x<0 \\ r(x) & \text{if } x\geq 0 \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} \ell(x) &= (\alpha-x)^2e^{(5+x)^2}, \\ r(x) &= (\alpha+x)^2e^{(5-x)^2}. \end{aligned}$$

Clearly, $\ell(x)$ and $r(x)$ are differentiable everywhere, and so $g(x)$ is differentiable if $x\neq 0$.

$x=0$ হলে $g(x)$-টা differentiable কিনা সেটা নিয়ে এবার মাথা ঘামাব--

✎Since $g(x)$ is continuous at $x = 0$, hence $g(x)$ is differentiable at $x = 0$ if and only if $\ell'(0) = r'(0)$.

We have

$$\begin{aligned} \ell'(x) &= e^{(5+x)^2}(-2(\alpha - x) + 2(\alpha - x)^2(5 + x)), \\ r'(x) &= e^{(5-x)^2}(2(\alpha + x) - 2(\alpha + x)^2(5 - x)). \end{aligned}$$

So $\ell'(0) = e^{25}(-2\alpha + 10\alpha^2)$ and $r'(0) = e^{25}(2\alpha - 10\alpha^2)$.

Thus $\ell'(0) = r'(0) \iff \cdots \iff \alpha = 0$ or $\frac{1}{5}$.

Hence the given function is differentiable everywhere if and only if $\alpha = 0$ or $\alpha = \frac{1}{5}$.

■

DAY 24
Limit বার করার নানা কায়দা (part 1)

আমরা আজকে শিখব কী করে নানারকমের limit বার করতে হয়। কিন্তু তার আগে একটা নতুন ধরণের limit-এর কথা শিখে নিই--infinite limit.

24.1 Infinite limit

একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 15: Fig 21-এ $f(x) = \frac{1}{x}$-এর গ্রাফ দেখিয়েছি। বলতে পারো $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}$ কত হবে? আর $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}$-ই বা কী হবে?

SOLUTION: গ্রাফটা দেখেই বুঝবে যে, x-টা যতই ডানদিক থেকে 0-র দিকে এগোবে, ততই $\frac{1}{x}$-টা তেড়েফুঁড়ে উঠে মহাকাশের দিকে ছুটছে। এই ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় আমরা বলি

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty.$$

একইভাবে যদি বাঁদিক থেকে 0-র দিকে এগোতাম, তবে নামতে নামতে একেবারে অতলে তলিয়ে যেতাম। সেটাকে লিখতাম--

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Fig 21

Fig 22

সোজা উঠেই চলেছে মহাশূন্যের দিকে

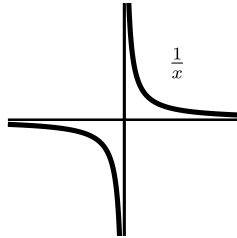
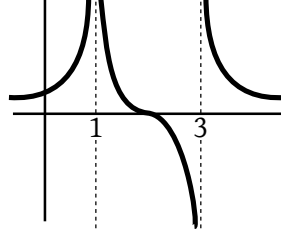
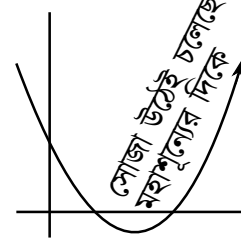



Fig 23

■

Exercise 4: Fig 22 দেখে বলো এদের মধ্যে কোন limit-টা ∞ বা $-\infty$.

$$\lim_{x\to 1-} f(x),\ \lim_{x\to 1+} f(x),\ \lim_{x\to 3-} f(x),\ \lim_{x\to 3+} f(x).$$

■

Example 16: Fig 23-এ একটা গ্রাফ এঁকেছি, যেটা একটা দুহাত উপরে তোলা parabola. এখানে x যতই বাড়ছে, $f(x)$-ও ততই আকাশে উঠে যাচ্ছে। এটাকে অংকের ভাষায় লিখব--

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

আবার x যতই কমছে (মানে যতই তুমি x-axis ধরে বাঁদিকের দিকে চলতেই থাকছ), তখনও $f(x)$ ফের আকাশে উঠে যাচ্ছে। তাই বলব--

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

■

প্রথম অধ্যায়ে polynomial-দের গ্রাফ নিয়ে যা বলেছিলাম, সেটা যদি মনে থেকে থাকে, তবে নীচের অংকটা অনায়াসে হবে।

Example 17: The limit of $\sum_{n=1}^{1000}(-1)^n x^n$ as $x\to\infty$

(A) does not exist

(B) exists and equals 0

(C) exists and approaches ∞

(D) exists and approaches $-\infty$

(JEE2013.8)

SOLUTION: লক্ষ করো যে, $\sum_{n=1}^{1000}(-1)^n x^n$ আসলে একটা polynomial, যার degree হল 1000. যেহেতু 1000 একটা even সংখ্যা, তাই হয় দুহাতই উপরে থাকবে, নয়তো দুহাতই নীচে থাকবে। কোনটা হবে, সেটা নির্ভর করবে x^{1000}-এর coefficient-এর চিহ্নের উপরে। এখানে coefficient-টা হল $(-1)^{1000} = 1 > 0$. তাই উত্তর হবে (C). ■

24.2 সহজ থেকে জটিল

Limit বার করা সবচেয়ে সহজ হল continuous function-দের বেলায়, কারণ সেখানে function-এর value-টাই হয় limit, অর্থাৎ $f(x)$ যদি $x = a$-তে continuous হয়, তবে

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

হতে বাধ্য। এটাই তো আসলে continuous-এর সংজ্ঞা! সহজ সহজ function-দের মিলিয়ে-জুলিয়ে জটিলতর function বানানো যায়। যদি সহজ function-গুলোর limit জানা থাকে, তবে জটিলতর function-গুলোরও limit অনেক সময়ে বার করে দেওয়া যায়। সেইরকম কিছু কায়দা এবার বলব। আলোচনাটা করব দুইভাগে, limit-টা যখন finite, আর limit-টা যখন infinite বা undefined.

24.2.1 Finite

THEOREM

If $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, and $p, q \in \mathbb{R}$ are any numbers, then

$$\lim_{x\to a}(pf(x) + q) = pL + q.$$

অর্থাৎ কিনা কোনো সংখ্যা যোগ বা গুণ করলে সেটা limit-এর বাইরে বেরিয়ে আসে। এখানে ওই যে $L \in \mathbb{R}$ লিখে নিয়েছি, ওতেই বোঝা যাচ্ছে যে, আমরা এখানে finite limit নিয়ে কাজ করছি।

Example 18: $\lim_{x\to 2}(5 + 3\sin x)$ বার করো।

SOLUTION: আমরা জানি যে, $\sin x$ হল continuous, তাই $\lim_{x\to 2}\sin x = \sin 2$. তাই $\lim_{x\to 2}(5+3\sin x) = 5 + 3\sin 2$. ■

কিছু function-কে যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ করে নতুন function বানালে limit-এর আচরণ বেশ ভদ্র হয়--

THEOREM

If $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ and $\lim_{x\to a} g(x) = K \in \mathbb{R}$, then

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + K.$
2. $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = L - K.$
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LK.$
4. $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L/K$ if $K \neq 0.$

Example 19: $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + e^x \cos x}{x^2+1} = ?$

SOLUTION: Continuous function-দের তালিকা থেকেই জানি যে,

- $\lim_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0,$

- $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$.

সুতরাং আমাদের limit-টা হবে

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + e^x \cos x}{x^2+1} = \frac{2\times 0 + 1\times 1}{0+1} = 1.$$

■

এই ধর্মগুলো বেশ কাজের জিনিস, কিন্তু মাঝে মাঝে ছাত্রছাত্রীরা একটা ভুল করে বসে। যেমন ধরো প্রথম ধর্মটা--

> যদি f আর g-এর limit হয় $L \in \mathbb{R}$ আর $K \in \mathbb{R}$, তবে $f+g$-এর limit-টা হবে $K+L$.

ছাত্রছাত্রীরা এর থেকে ভুল সিদ্ধান্ত করে বসে যে, f আর g-এর limit যদি undefined হয়, তবে $f+g$-এর limit-ও undefined হবে। ঠিক যেন তোমাকে বললাম যে ঘোড়াদের চারটে পা থাকে, আর তুমি সিদ্ধান্ত করে বসলে যে ঘোড়া না হলে চারটে পা থাকতে পারে না। আমার বক্তব্য ছিল ঘোড়া হলে চারটে পা থাকবেই। ঘোড়া না হলে কী হয়, সে বিষয়ে আমি নীরব ছিলাম। কিন্তু তুমি আমার মুখে কথা বসিয়ে নিয়েছ যে, ঘোড়া না হলে চারটে পা থাকে না। এই ভুলটাকে কাজে লাগিয়ে এক ধরণের ছেলে-ঠকানো[2] প্রশ্ন বানানো যায়।

Example 20: $\lim_{x\to 1}([x]+[-2x])$ বার কর।

SOLUTION: এখানে যদি তুমি ফস্ করে

$$\lim_{x\to 1}([x]+[-2x]) = \lim_{x\to 1}[x] + \lim_{x\to 1}[-2x]$$

লিখে এগোবার চেষ্টা করো, তবেই মুস্কিল। কারণ ডানদিকের দুটো limit-ই undefined, তাই তাদের যোগফলও undefined. কিন্তু উত্তরটা মোটেই undefined নয়। যদি $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ হয় তবে $[x]=0$ আর $-2x \in (-2,-1)$, সুতরাং $[-2x]=-2$. তাই left hand limit হল $0+(-2)=-2$. একইভাবে, যদি $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ হয়, তবে $[x]=1$ আর $-2x \in (-3,-2)$, তাই $[-2x]=-3$. সুতরাং right hand limit হল $1+(-3)=-2$. যেহেতু দুই দিকের limit-ই -2 হল, তাই উত্তর হবে -2. ■

এবার limit-দের আরেকটা ধর্মের কথা বলি, যেটা দিয়ে অনেক কঠিন অংককে ঘায়েল করে দেওয়া যায়। সেটা হল এই যে, "limit সবসময়ে continuous function-এর ভিতরে ঢুকে যায়।" বিস্তারিত করে বললে এইরকম-- ধরো তোমাকে বলেছে $\lim_{x\to a} f(g(x))$ বার করতে। যদি তোমার জানা থাকে যে $\lim_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R}$ এবং $f(x)$-টা হল L-এ continuous, তবে তুমি লিখতে পারো

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\big(\lim_{x\to a} g(x)\big) = f(L).$$

Example 21: $\lim_{x\to 0}\sin(x^2+1)$ বার করো।

SOLUTION: এখানে $f(x)=\sin x$ আর $g(x)=x^2+1$. আমরা জানি যে, $f(x)$-টা সর্বত্রই continuous, আর $\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1$.
তাই উত্তর হবে $\sin 1$. ■

---

[2] ছেলে-ঠকানো বললাম বলে মেয়েরা যেন আবার নিশ্চিন্ত হয়ে বসে থেকো না। এই প্রশ্নগুলোতে মেয়েরাও সাধারণতঃ ছেলেদের মতই ঠকে যায়!

Exercise 5: $\lim_{x\to 0}|\cos(x)-2|$ কত হবে? ■

24.2.2 Infinite আর undefined

এখানে আমরা সেইসব limit-দের নিয়ে কাজ করব, যারা ∞ বা $-\infty$ বা undefined হতে পারে। প্রথমে যোগের সূত্রটা বলি। নানারকম কেস হতে পারে, তাই টেবিলের আকারে দিলাম--

$f(x)$ -এর limit (কলাম); $g(x)$-এর limit (সারি)

	∞	$-\infty$	fin	und
∞	∞	[?]	∞	?
$-\infty$	[?]	$-\infty$	$-\infty$	?
fin	∞	$-\infty$	জানা	und
und	?	?	und	[?]

এখানে "und" মানে হল undefined, আর "fin" মানে finite. যেখানে '?' দেখবে সেইসব ক্ষেত্রে এক কথায় কিছু বলা যায় না। এদের মধ্যে কয়েকটার বেলায় দেখেছি ছাত্রছাত্রীরা হোঁচট খায় বেশী। সেই '?'-গুলোকে চৌকোর মধ্যে দেখিয়েছি। যেমন ধরো, যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ আর $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হয়, তবে অনেকেই ফস্ করে ভেবে বসে যে $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ হবে undefined. কিন্তু সেটা মোটেই ঠিক নয়, f আর g-এর উপর নির্ভর করে limit-টা $-\infty, \infty$ বা কোনো সংখ্যাও হতে পারে, আবার undefined-ও হতে পারে। নীচের অংকটা করলে সেটা নিজেই দেখতে পাবে।

Exercise 6: প্রতিক্ষেত্রে একটা করে $f(x)$ আর $g(x)$ দেওয়া হয়েছে। প্রথমে দেখে নাও যে, সব ক্ষেত্রেই $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ আর $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ হচ্ছে। তারপর সরাসরি $\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x))$ বার করে দ্যাখো। (*i*) $f(x) = x,\ g(x) = -x$. (*ii*) $f(x) = x,\ g(x) = -x+5$. (*iii*) $f(x) = x,\ g(x) = -2x$. (*iv*) $f(x) = 2x,\ g(x) = -x$. (*v*) $f(x) = x,\ g(x) = -x+\sin x$.
■

এই টেবিলটাকে বিয়োগের সূত্র হিসেবেও ব্যবহার করা যায়, কারণ বিয়োগ কে আমরা যোগ দিয়ে লিখতে পারি, এইভাবে--

$$5-3 = 5+(-3).$$

এই যে 3-এর আগে মাইনাস লাগিয়ে -3 পেলাম, এই কাজটা limit-দের ক্ষেত্রে এইভাবে হয়-- ∞-র আগে মাইনাস লাগালে তো $-\infty$ হয় দেখছই, তেমনি $-\infty$-র আগে মাইনাস দিলে আবার ∞ ফিরে পাবে। আর undefined-এর আগে মাইনাস লাগালে undefined-ই থাকে।
গুণের সূত্রটা এইরকম--

$f(x)$ -এর limit (কলাম); $g(x)$-এর limit (সারি)

	∞	$-\infty$	fin <0	fin 0	fin >0	und
∞	∞	$-\infty$	$-\infty$	?	∞	?
$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	?	$-\infty$	?
fin <0	$-\infty$	∞	জানা			und
fin 0	?	?				
fin >0	∞	$-\infty$				
und	?	?	und			[?]

এটাকে ভাগের কাজেও লাগানো যায়, কারণ ভাগকে গুণ দিয়ে লেখা যায়, যেমন

$$\frac{5}{2} = 5\times\frac{1}{2}.$$

এখানে যেমন 2 থেকে $\frac{1}{2}$ বানালাম, সেটা limit-এর ক্ষেত্রে কীভাবে করা যায় বলি।

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$
∞	0
$-\infty$	0
undefined	?
0	?
$L \in \mathbb{R},\ L \neq 0$	$\frac{1}{L}$

এই টেবিলগুলো মনে রাখা খুব কঠিন কিছু নয়। কিন্তু দুঃখের বিষয়, অনেক ছাত্র ব্যাপারটাকে এইভাবে মন্ত্রের মত মুখস্থ করে-- "$\infty + \infty = \infty$", তারপর "$\infty +$ কোনো সংখ্যা$= \infty$", এইরকম। এগুলো মোটেই ঠিক নয়। যোগ, বিয়োগ গুণ, ভাগ আমরা যা শিখেছি সবই সংখ্যাদের জন্য, আর ∞ বা $-\infty$ কোনো সংখ্যা নয়। তাই $\infty + \infty$ ইত্যাদিরা সকলেই undefined. তাছাড়া যারা এরকম মন্ত্র মুখস্থ করে, তারা এই মন্ত্রটাও কোথা থেকে যেন জোগাড় করে, $1/0$ নাকি ∞ হয়! এখানে দুটো ভুল--এক, $1/0$ হল undefined, এবং দুই, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ হলেও $\frac{1}{f(x)}$-এর limit কিন্তু ∞ নাও হতে পারে! সেটা $-\infty$-ও হতে পারে, undefined-ও হতে পারে। নীচের অংকটা তোমাকে এ বিষয়ে সচেতন রাখবে।

Exercise 7: প্রতিক্ষেত্রে একটা করে $f(x)$ দিয়েছি যাতে $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ হয়। দ্যাখো তো $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)}$ কী হচ্ছে!
(*i*) $f(x) = x$. (*ii*) $f(x) = |x|$. (*iii*) $f(x) = -x^3$. (*iv*) $f(x) = -x^2$.
HINT: গ্রাফ এঁকে চিন্তা করো।
■

24.3 Derivative দিয়ে limit

ধরো তোমাকে একটা function দিলাম $f(x) = \cos(e^x)$. দিয়ে বললাম এই limit-টা বার করতে

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2},$$

তবে তুমি একটা shortcut করতে পারো। চট্ করে লক্ষ করো যে, এই limit-টা আসলে $f'(2)$. আমরা আগেই শিখেছি কী করে $f'(x)$ বার করতে হয়। Chain rule লাগিয়ে

$$f'(x) = -\sin(e^x)e^x.$$

এবার এর মধ্যে $x = 2$ বসিয়ে দিলেই উত্তর পেয়ে যাব $f'(2) = -\sin(e^2)e^2$.
এই কায়দায় অনেক অংক "ফাঁকি" দিয়ে করে দেওয়া যায়। এটাকে "ফাঁকি" বললাম, কারণ এই যে তুমি বললে $f'(x) = -\sin(e^x)e^x$, এইটা বার করতেই তো limit-টা লেগেছে। নেহাত তোমার সেটা জানা ছিল বলে লিখে দিতে পারলে। যাই হোক, এক রাশ limit কষার চেয়ে কিছু derivative মনে রাখা সহজ, তাই এই "ফাঁকি"-টা অনেক সময়েই বেশ কাজে দেয়, বিশেষ করে MCQ-এর জগতে। নীচের অংকটা তার একটা উদাহরণ--

Example 22: Let $f(x)$ be a differentiable function and $f'(4) = 5$. Then

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(4) - f(x^2)}{x - 2}$$

is

(A) 0 (B) 5 (C) 20 (D) -20

(JEE2014.23)
SOLUTION: ধরো $g(x) = f(x^2)$. তাহলে

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(4) - f(x^2)}{x-2} = -\lim_{x\to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = -g'(2).$$

এখানে chain rule ব্যবহার করে দেখাই যাচ্ছে যে, $g'(x) = 2xf'(x^2)$. সুতরাং $g'(2) = 4f'(4) = 20$. এবার যেন মাইনাসটা বসাতে ভুলে যেও না। উত্তর হবে (D). ■

Example 23: If $f(2) = 4, f'(2) = 4$ then the value of $\lim_{x\to 2} \frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$ is

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 0

(HS2015)
SOLUTION: এখানে উপরতলায় আছে $xf(2) - 2f(x)$. লক্ষ করো যে, প্রথম term-এর বাইরের x-টা দ্বিতীয় term-এ 2 হয়ে গেছে, আবার ভিতরের 2-টা দ্বিতীয় term-এ গিয়ে x হয়ে গেছে। একই সঙ্গে এইরকম দুটো পরিবর্তন সামলানো কঠিন হয়, তাই আমরা একটা একটা করে পাল্টাব--

$$\lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - xf(x) + xf(x) - 2f(x)}{x-2}$$

কেমন দুই ধাপে এগোচ্ছি দ্যাখো। প্রথম ধাপে
ভিতরের 2-টা খালি x হল, বাইরের x-টা অপরিবর্তিত রইল।
দ্বিতীয় ধাপে বাইরের x-টা 2 হল।

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x(f(2) - f(x)) + (x-2)f(x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \left\{ x \times \frac{-(f(x) - f(2))}{x-2} + f(x) \right\}$$

এইবার লক্ষ কর যে, $x \to 2$ হলে $x, \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ এবং $f(x)$,
এদের সবার limit-ই finite হয়, কারণ $f(x)$-টা $x = 2$-তে
differentiable, অতএব continuous-ও বটে। তাই ভেঙে লেখা যাবে--

$$= \lim_{x\to 2} x \times \lim_{x\to 2} \frac{-(f(x) - f(2))}{x-2} + \lim_{x\to 2} f(x)$$

$$= -2f'(2) + f(2) = -2 \times 4 + 4 = -4.$$

সুতরাং উত্তর হল (A). ■

Example 24: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be differentiable at $x = 0$. If $f(0) = 0$ and $f'(0) = 2$, then the value of

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}[f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(2015x)]$$

is

(A) 2015 (B) 0 (C) 2015×2016 (D) 2015×2014

(JEE2015.66)

SOLUTION: যেটার limit বার করতে দিয়েছে, সেটাকে যদি ভেঙে লিখি তবে হয়

$$\frac{f(x)}{x}+\frac{f(2x)}{x}+\frac{f(3x)}{x}+\cdots+\frac{f(2015x)}{x}.$$

পুরোটার limit বার করার চেষ্টা করার আগে দেখি খালি প্রথম term-টার limit-টা বার করা যায় নাকি। যেহেতু $f(0)=0$, তাই--

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2.$$

এর পরের term-টার limit-ও একইভাবে বেরিয়ে যাচ্ছে--

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}.$$

এই limit-টা দেখতে প্রায় আগেরটারই মত, খালি x-এর জায়গায় $2x$ রয়েছে। যদি $y=2x$ নিই, তবে $x\to 0$ হলে $y\to 0$ হবে। সুতরাং--

$$2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}=2\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=2f'(0)=4.$$

একই কায়দা প্রতিটা term-এর ক্ষেত্রেই খাটে--

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(kx)}{x}=kf'(0)=2k.$$

সুতরাং যেটা বার করতে দিয়েছে, সেটা হল

$$2(1+2+\cdots+2015)=2015\times 2016.$$

সুতরাং উত্তর হল (C). ■

Example 25: Let $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ be a function differentiable at 3, and satisfying $f(3)=3f'(3)>0$. Then the limit

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f\left(3+\frac{3}{x}\right)}{f(3)}\right)^x$$

(A) exists and is equal to 3

(B) exists and is equal to e

(C) exists and is always equal to $f(3)$

(D) need not always exist.

(BStat/BMathMCQ.25)

SOLUTION: এই অংকটা দেখেই কেমন যেন কান্না পেয়ে যায়। যাই হোক, কান্না-টান্না শেষ হলে চোখ মুছে ভালো করে তাকিয়ে দেখলে একটু আশার আলো দেখা যাবে। এখানে একটা বিচ্ছিরি জিনিসের উপরে power হিসেবে x আছে। একটা

power-এর উপরে নীচে দুজায়গাতেই x থাকলে, প্রথম কাজ হওয়া উচিত power-র সংজ্ঞা লাগিয়ে দেওয়া। সংজ্ঞাটা হল এই--যদি $a > 0$ হয় তবে $a^b = e^{b \log a}$. সেটা এখানে লাগালে হয়--

$$\left(\frac{f\left(3+\frac{3}{x}\right)}{f(3)}\right)^x = \exp\left(x \log \frac{f\left(3+\frac{3}{x}\right)}{f(3)}\right) = \exp\left(x\left[\log f\left(3+\frac{3}{x}\right) - \log f(3)\right]\right).$$

এবার যদি $h = \frac{3}{x}$ নাও, তবে $x \to \infty$ হলে $h \to 0$ হবে। যেহেতু e^x হল continuous, তাই এই limit-টা হবে

$$\exp\left(3 \times \lim_{h\to 0} \frac{\log f(3+h) - \log f(3)}{h}\right) = \exp\left(3\frac{d}{dx}\big(\log f(x)\big)\Big|_{x=3}\right) = \exp\left(3 \times \frac{f'(3)}{f(3)}\right) = \exp(1) = e.$$

অতএব উত্তর হল (B). ■

অনেক কঠিন কঠিন অংক শিখে ফেললে এমন অবস্থা হয় যে, তখন সহজ অংক দেখলেও চেনা যায় না। দ্যাখো, নীচের অংকটাকে সহজ বলে চিনতে পারো কিনা।

Example 26: The function

$$f(x) = \frac{\tan\left\{\pi\left[x - \frac{\pi}{2}\right]\right\}}{2 + [x]^2},$$

where $[x]$ denotes the greatest integer $\leq x$, is

(A) continuous for all values of x

(B) discontinuous at $x = \frac{\pi}{2}$

(C) not differentiable for some values of x

(D) discontinuous at $x = -2$.

(JEE2014.13)

SOLUTION: লক্ষ করো যে, $\left[x - \frac{\pi}{2}\right]$ সর্বদাই একটা integer. সুতরাং x যাই হোক না কেন, $\tan\left\{\pi\left[x - \frac{\pi}{2}\right]\right\} = 0$ হতে বাধ্য। আর নীচের তলার $2 + [x]^2$ কখনোই 0-র ধারে কাছে আসছে না (কারণ 2-এর নীচে নামতে পারবে না)। সুতরাং x-এর যেকোনো value-র জন্যই $f(x)$ আসলে 0. অতএব উত্তর হবে (A). ■

DAY 25
Limit বার করার নানা কায়দা (part 2)

ক্যালকুলাসে আমাদের অনেক সময়েই এমন সব function নিয়ে কাজ করতে হয়, যাদের limit বার করতে গেলে $\frac{0}{0}$ চেহারাটা এসে যায়। একটা উদাহরণ তো দেখেইছো--

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad \text{if } x \neq 2.$$

এখানে আমরা অন্ধের মত $x = 2$ বসাতে গেলে $\frac{0}{0}$ এসে যাবে। যদিও আমরা দেখেছি কীভাবে $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ ব্যবহার করে limit-টা বার করা যায়। এরকম আরেকটা অংক দেখা যাক।

Example 27: The value of

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}\right|$$

is

(A) n (B) $\frac{n+1}{2}$ (C) $\frac{n(n+1)}{2}$ (D) $\frac{n(n-1)}{2}$

(JEE2011.74)

SOLUTION: এখানে $x\neq 1$ নিয়ে কাজ হচ্ছে।

$$\begin{aligned}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} &= \frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}\end{aligned}$$

এখানে ওই $-n$-টাকে আমরা n-খানা -1-এ ভেঙে নিয়েছি।

$$\begin{aligned} &= \frac{x-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+\cdots+\frac{x^n-1}{x-1}\\ &= 1+(1+x)+(1+x+x^2)+\cdots+(1+x+\cdots+x^{n-1}).\end{aligned}$$

উত্তর হবে (C). ■

এখানে আমরা এই ফর্মুলাটা ব্যবহার করে পার পেয়ে গেলাম--

$$x^k-1=(x-1)(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1).$$

কিন্তু সব সময়ে এরকম পরিচিত ফর্মুলা নাও থাকতে পারে। আরো কয়েকটা $\frac{0}{0}$-জাতীয় limit বলে দিই, যেগুলো অনেক জায়গায় কাজে লাগে।

25.1 কিছু $\frac{0}{0}$ চেহারার limit

এখানে আমরা তিনটে এরকম limit-এর উল্লেখ করব। এগুলো আমরা প্রমাণ করব না--

THEOREM

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

প্রমাণ করব না বললাম বটে, কিন্তু এদেরকে মনে রাখার জন্য differentiation-এর ফাঁকির কায়দাটা লাগাতে পারো। যেমন

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\left.\frac{d}{dx}\sin x\right|_{x=0}=\cos 0=1.$$

তেমনি

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\left.\frac{d}{dx}e^x\right|_{x=0}=e^0=1.$$

একইভাবে তিন নম্বরটাও দেখাতে পারবে।
এবার আমরা একে একে এদের বিভিন্ন প্রয়োগ দেখব।

25.1.1 $\sin x/x$

Example 28: If the function $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{kx} + k & \text{if } x \neq 0 \\ 2 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ is continuous at $x = 0$, then find k.[2] **(HS2015)**

SOLUTION: এখানে প্রথমেই বুঝে নাও যে, তোমাকে k-র এমন value করতে বলেছে যাতে $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ হয়।

✎For $f(x)$ to be continuous at $x = 0$ we need $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, ie,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{kx} + k\right) = 2.$$

Now

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{kx} + k\right) = \frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) + k = \frac{1}{k} + k.$$

So we need $\frac{1}{k} + k = 2$, or $k^2 - 2k + 1 = 0$, or $(k-1)^2 = 0$, or $k = 1$.

■

Example 29: If

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

then examine the continuity of the function at $x = 0$.[2] **(HS2016.ci)**

SOLUTION: এখানে বলেছে "examine continuity". এর মানে হল পরীক্ষা করে দেখতে হবে continuous কিনা। যদি না হয়, তবে এটাও দেখে নেওয়া ভালো left continuous বা right continuous হচ্ছে কিনা।
এই অংকটা দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে $\frac{\sin x}{x}$-এর limit কাজে লাগবে। কিন্তু সমস্যা হয়েছে $\sin x$-টা absolute value-র মধ্যে থাকায়। এইখানটা গ্রাফ এঁকে বুঝে নেওয়া যাক। Fig 24-এ $\sin x$-এর গ্রাফ এঁকেছি। লক্ষ করো, যখন x-টা ডানদিক থেকে 0-র দিকে এগোচ্ছে, তখন $\sin x$-টা উপর থেকে 0-র দিকে নামছে। সুতরাং তখন $|\sin x| = \sin x$ নিলেই চলবে--

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Fig 24

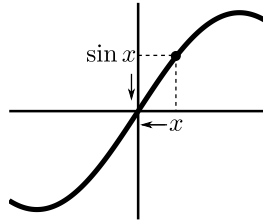
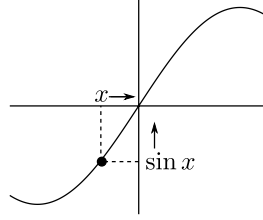



Fig 25

আবার Fig 25-এর থেকে দেখা যাচ্ছে, যখন $x \to 0-$ হচ্ছে তখন $\sin x$-টা নীচের থেকে 0-র দিকে এগোচ্ছে, তাই তখন $|\sin x| = -\sin x$ নেব--

✎But

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{x} = -1.$$

এবার $\lim_{x\to 0+} f(x)$, $\lim_{x\to 0-} f(x)$ আর $f(0)$-র মধ্যে তুলনা করব--

✎Thus $\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$.

Hence $f(x)$ is right continuous, but not continuous at $x = 0$.

■

আমরা শিখেছি $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ হয়। এটাকে কাজে লাগানোর অন্যতম উপায় এইরকম--

> কোনো limit-এর অংকে কোথাও কোনো fraction-এর একদিকে যদি sin(কিছু একটা) থাকে, যেখানে 'কিছু একটা"-টা 0-তে যাচ্ছে, তবে fraction-এর অন্যদিকে ওই "কিছু একটা"-টা আমদানি করা।

নীচের অংকটা এরকম একটা উদাহরণ।

Example 30: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi \sin^2 x)}{x^2} =$

(A) π^2 (B) 3π (C) 2π (D) π

(JEE2011.75)

SOLUTION: এখানে উপরতলায় আছে $\sin(\pi \sin^2 x)$. এটা sin(কিছু একটা). ওই "কিছু একটা"-টাকে y নাম দেওয়া যাক, মানে-- $y = \pi \sin^2 x$. লক্ষ করো এখানে $y \to 0$ হচ্ছে-- কারণ $\sin x$ একটা continuous function, আর $\sin 0 = 0$.
এখানে $\sin y$-টা আছে উপরতলায়, তাই আমরা নীচের তলায় একটা y আমদানি করে নেব--

$$\frac{\sin y}{x^2} = \frac{\sin y}{y} \times \frac{y}{x^2}.$$

যেহেতু $y \to 0$, তাই এর মধ্যে প্রথম অংশটা 1-এ যাচ্ছে। দ্বিতীয় অংশের limit-টা হল

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin^2 x}{x^2}\\ &= \pi\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\\ &= \pi\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\end{aligned}$$

এখানে $\frac{\sin x}{x}$ ঢুকে আছে x^2-এর পেটে।

আমরা জানি যে, x^2 হল continuous, তাই limit-টা ওর ভিতরে ঢুকে যাবে।

$$= \pi\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \pi\times 1^2 = \pi.$$

অতএব উত্তর হল (D). ■

Exercise 8: The limit $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^\alpha x}{x}$ exists *only when*

(A) $\alpha \geq 1$ (B) $\alpha = 1$ (C) $|\alpha| \leq 1$ (D) α is a positive integer.

(BStat/BMath2013MCQ.20)

HINT:

এইভাবে সাজিয়ে নাও--

$$\frac{\sin^\alpha x}{x} = \frac{\sin^\alpha x}{x^\alpha\times x^{1-\alpha}} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha \times x^{\alpha-1}.$$

এর মধ্যে প্রথম অংশটা হল x^α-র পেটে $\frac{\sin x}{x}$ ঢুকিয়ে তৈরী। যেহেতু x^α হল $x=1$-এ continuous, আর $\frac{\sin x}{x}\to 1$, তাই প্রথম অংশটা 1-এ যাচ্ছে। দ্বিতীয় অংশটা নিয়ে কী বলতে পারো? ■

25.1.2 $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{\log_e(1+x)}{x}$

আমরা শিখেছি যে, $x\to 0$ হলে $\frac{e^x-1}{x}\to 1$ হয়। সেটা লাগালেই নীচের অংকটা হয়ে যাবে।

Exercise 9: $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\tan^2 x}{x^3}$

(A) does not exist

(B) exists and equals 0

(C) exists and equals $\frac{2}{3}$

(D) exists and equals 1.

(BStat/BMath2015.10)

HINT: জিনিসটাকে এইভাবে সাজিয়ে নাও--

$$\frac{e^x-1}{x}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\cos^2 x.$$

এবার limit-টা বার করা যাচ্ছে? ■

এখানে আমরা ব্যবহার করলাম $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. আমরা আরো শিখেছি যে $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$. এদেরকে ব্যবহার করে limit-এর অংক করার একটা কায়দা এরকম--

> যেই দেখবে কোনো fraction-এর একদিকে ($e^{\text{কিছু একটা}}-1$) বা $\log_e(1+\text{কিছু একটা})$ আছে, অমনি অন্য দিকে একখানা "কিছু একটা" আমদানি করে নেবে। এই কায়দাটা কাজ করার জন্য অবশ্যই ওই "কিছু একটা"-টাকে 0-র দিকে যেতে হবে।

একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 31: Evaluate the limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-x}-2}{x}.$$

[2] **(HS2015)**
SOLUTION:

✎Here

$$\frac{e^{2x}+e^{-x}-2}{x}=\frac{e^{2x}-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{x}.$$

যেই উপর তলায় $e^{2x}-1$ দেখছো, অমনি নীচের তলায় একটা $2x$ আমদানি করো--

✎Now

$$\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2x}{x}=2\times\frac{e^{2x}-1}{2x},$$

ঠিক একইভাবে উপরে যেখানে $e^{-x}-1$ আছে, এখানে নীচের তলায় আমদানি করব $-x$.

✎and

$$\frac{e^{-x}-1}{x}=-\frac{e^{-x}-1}{-x}.$$

When $x\to 0$ we have $2x\to 0$ and $-x\to 0$, and so by standard results, the required limit is $2\times 1-1=1$.

■

Example 32: Evaluate:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+\alpha x)}{e^{2x}-1}.$$

[2] **(HS2016.cvi)**
SOLUTION:

✎

$$\frac{\log_e(1+\alpha x)}{e^{2x}-1} = \left(\frac{\log_e(1+\alpha x)}{\alpha x} \times \alpha x\right) \times \left(\frac{2x}{e^{2x}-1} \times \frac{1}{2x}\right) = \frac{\log_e(1+\alpha x)}{\alpha x} \times \frac{2x}{e^{2x}-1} \times \frac{\alpha}{2}.$$

Now, as $x \to 0$ we have $\alpha x \to 0$ and so by standard result $\frac{\log_e(1+\alpha x)}{\alpha x} \to 1$.
Also $2x \to 0$ and so by standard result, $\frac{2x}{e^{2x}-1} = 1$.
So the required limit is $\frac{\alpha}{2}$.

■

এবার আরো দুটো $\frac{0}{0}$ চেহারার limit বলি।

THEOREM

If $a > 0$, then
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$
If $\alpha \in \mathbb{R}$, then
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

নীচের অংকটায় এই দুটোই লাগবে।

Example 33: $\lim_{x\to 0} \frac{\pi^x - 1}{\sqrt{1+x}-1}$

(A) does not exist. (B) equals $\log_e(\pi^2)$ (C) equals 1. (D) lies between 10 and 11.

(JEE2012.20)

SOLUTION:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^x - 1}{\sqrt{1+x}-1} &= \frac{\pi^x - 1}{x} \times \frac{x}{(1+x)^{1/2}-1} \\ &\to \log_e \pi \times \frac{1}{1/2} = 2\log_e \pi = \log_e(\pi^2). \end{aligned}$$

সুতরাং দেখাই যাচ্ছে যে (B) ঠিক, তাই (A) আর (C) ঠিক হতে পারে না। এবার দেখি (D) ঠিক হতে পারে কিনা। আমরা বোঝার চেষ্টা করছি $2\log_e \pi \in [10, 11]$ কিনা, মানে $\log_e \pi \in [5, 5.5]$ কিনা, মানে $\pi \in [e^5, e^{5.5}]$ কিনা (যেহেতু e^x একটা increasing function)। এখন $2^5 = 32$, আর $e > 2$ তাই e^5-ই তো 32 ছাড়িয়ে যাচ্ছে, ওদিকে π তো 4-এর থেকেও কম। সুতরাং (D)-ও ভুল। ■

বুড়ো তার দুটো আঙুল দিয়ে আমায় একটুখানি টিপে টিপে বলল "আড়াই সের"।
আমি বললাম, "সেকি! পটলার ওজনই তো একুশ সের--সে আমার চাইতে দেড় বছরের ছোট।"

--হ য ব র ল

Exercise 10: The value of $\lim_{x\to\infty}(3^x + 7^x)^{1/x}$ is

(A) 7 (B) 10 (C) e^7 (D) ∞.

(BStat/BMath2013Short.5)
HINT: শুরুটা ধরিয়ে দিচ্ছি।

$$(3^x + 7^x)^{1/x} = 7\left(1 + \left(\frac{3}{7}\right)^x\right)^{1/x}.$$

আমরা জানি যে, $a > 0$ হলে $a^b = e^{b\log a}$. সুতরাং

$$\left(1 + \left(\frac{3}{7}\right)^x\right)^{1/x} = \exp\left[\frac{1}{x}\log\left(1 + \left(\frac{3}{7}\right)^x\right)\right] \to e^0 = 1,$$

কারণ, $x \to \infty$ হলে $\left(\frac{3}{7}\right)^x \to 0$ হয়, $\because \frac{3}{7} \in (0,1)$. সুতরাং $\log\left(1 + \left(\frac{3}{7}\right)^x\right) \to \log 1 = 0$. ওদিকে $\frac{1}{x} \to 0$-ও হচ্ছে। ■

25.2 ?/0

এতক্ষণ আমরা $\frac{0}{0}$ চেহারার বিভিন্ন limit নিয়ে কাজ করেছি, মানে $\frac{f(x)}{g(x)}$ জাতীয় কোনো কিছুর limit, যেখানে $f(x)$ আর $g(x)$-এর limit আলাদা করে 0 হচ্ছে। এবার কিছু উদাহরণ দেখব যেখানে $g(x)$-এর limit-টা 0 হবে, কিন্তু $f(x)$-র limit নিয়ে কিছু সমস্যা আছে, হয়তো সেটা 0 নয়, বা এমন কি হয়তো defined-ও নয়! এইধরণের limit-দের আমরা এ বইতে ?/0 চেহারা নাম দিয়েছি। এদের বেলায় দুটো জিনিস মনে রেখো। প্রথমটা হল--

> যদি $f(x)$-এর limit-টা 0 না হয়, তবে কোনোভাবেই $\frac{f(x)}{g(x)}$-এর কোনো finite limit থাকতে পারে না। হয় limit-টা defined-ই হবে না, নয়তো ∞ বা $-\infty$ হবে।

এইটা ব্যবহার করে দুটো অংক করে নিই, তারপর দ্বিতীয় কথাটা বলব।

Example 34: If the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-(A+2)x+A}{x-2} & \text{if } x \neq 2 \\ 2 & \text{if } x = 2 \end{cases}$$

is continuous at $x = 2$, then

(A) $A = 0$ (B) $A = 1$ (C) $A = -1$ (D) $A = 2$

(JEE2011.76)
SOLUTION: এখানে continuous বলে দিয়েছে, মানে $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2$, অর্থাৎ

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(A+2)x+A}{x-2} = 2.$$

যদি $x \to 2$ হয়, তবে নীচের তলাটা যে 0-তে যাচ্ছে, সে তো দেখছই। উপরতলাটা যাচ্ছে $2^2 - (A+2)\times 2 + A = -A$-তে। যেহেতু বলে দিয়েছে $f(x)$-এর limit হল 2 (একটা finite সংখ্যা), তাই উপরতলার limit-টাকে 0 হতেই হবে, মানে $A = 0$ হতেই হবে। সুতরাং উত্তর হল (A). ■

Exercise 11: If $\lim_{x\to 0}\frac{2a\sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ exists and is equal to 1, then the value of a is

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1.

(JEE2014.32)

HINT:

এখানে limit-টা $\frac{0}{0}$ চেহারার। কিন্তু $\tan x$-টাকে $\frac{\sin x}{\cos x}$ করে লিখলেই একটা $\sin x$ কেটে দেওয়া যাচ্ছে--

$$\frac{(2a-2\cos x)\cos^3 x}{\sin^2 x}.$$

এবার limit-টা $?/0$ আকারের হয়েছে। বাকিটুকু তুমি করো। ■

এবার $?/0$ চেহারার limit-দের বিষয়ে দ্বিতীয় কথাটা বলি। ধরো $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ বার করছ যেখানে $\lim_{x\to a} g(x)=0$, কিন্তু $\lim_{x\to a} f(x)>0$. এবার তোমাকে ভেবে দেখতে হবে $x=a$-র ঠিক বাঁদিকে আর ডানদিকে $g(x)$-এর চিহ্ন কী হয়--

- যদি দু দিকেই >0 হয়, তবে $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ হবে।
- যদি দু দিকেই <0 হয়, তবে $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ হবে।
- যদি এক দিকে <0 আর অন্যদিকে >0 হয়, তবে $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ হবে undefined.

কোন কেসটা কোথায় লাগবে সেটা বোঝার জন্য গ্রাফ আঁকতে পারাটা খুব কাজে লাগবে। দুটো উদাহরণ দ্যাখো।

Example 35: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ আর $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$ বার করো।

SOLUTION: $x=0$-র ঠিক দুদিকে x^2 আর x^3-এর গ্রাফ দেখিয়েছি Fig 26 আর Fig 27-এ। x^2-টা $x=0$-র দু দিকেই >0. তাই $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$. কিন্তু x^3 লক্ষ করো $x=0$-র বাঁদিকে <0 আর ডানদিকে >0. তাই $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^3}=-\infty$, কিন্তু $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^3}=\infty$. সুতরাং $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$ হবে undefined. ■

Example 36: The limit of

$$\left[\frac{1}{x^2}+\frac{(2013)^x}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}\right]$$

as $x\to 0$

(A) approaches $+\infty$.

Fig 26

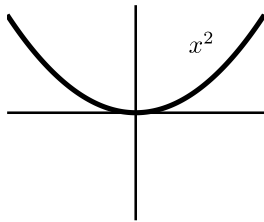
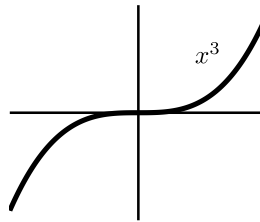



Fig 27

(B) approaches $-\infty$.

(C) is equal to $\log_e(2013)$

(D) does not exist.

(JEE2013.53)
SOLUTION: এখানে

$$\frac{(2013)^x}{e^x-1} - \frac{1}{e^x-1} = \frac{(2013)^x-1}{e^x-1}.$$

এটার limit যে 1 হবে, সেটা তোমার বুঝতে পারা উচিত।
এখানে $\frac{1}{x^2}$-এর limit হবে ∞.
সুতরাং সব মিলিয়ে limit-টা ∞ হতে বাধ্য। সুতরাং উত্তর হল (A). ■

DAY 26
Limit বার করার নানা কায়দা (part 3)

আজকে আমরা limit বার করার আরো তিনটে কায়দা শিখব, যেগুলো দিয়ে অনেক গোলমেলে দেখতে limit-কে চট্ করে ঘায়েল করা যায়। অনেক সময়ে খাতায় কলমে কষতেও হয় না, চোখে দেখেই বলে দেওয়া যায়।

26.1 Sandwich law

কিছু কিছু function আছে, যারা খালি একটা সীমিত পরিসরের মধ্যেই value নিতে পারে, তার বাইরে যেতে পারে না। যেমন, $\sin x$ বা $\cos x$ সর্বদাই $[-1,1]$-এর মধ্যে value নেয়। আরেকটা উদাহরণ হল $f(x) = x - [x]$. এক্ষেত্রে $f(x)$-এর value সব সময়েই $[0,1)$-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য। এই রকম function-দের দিয়ে তৈরী limit বার করার একটা ভালো হাতিয়ার হল **sandwich law**. একটা উদাহরণ নিলে ব্যাপারটা ভালো বোঝা যাবে।

Example 37: The limit of $x\sin(e^{1/x})$ as $x \to 0$

(A) is equal to 0 (B) is equal to 1 (C) is equal to $e/2$ (D) does not exist

(JEE2013.40)
SOLUTION: জিনিসটা দেখতে বেশ খটোমটো, বিশেষ করে ওই $\sin(e^{1/x})$ জায়গাটা। কিন্তু যতই খটোমটো লাগুক, হাজার হোক ওটা কোনো কিছু জিনিসের sin, তাই সবসময়েই $[-1,1]$-এর মধ্যেই থাকতে বাধ্য। তাকে গুণ করা হয়েছে x দিয়ে, সুতরাং পুরো জিনিসটা $-x$ থেকে x-এর মধ্যে থাকবে। মনে করতে পারো যেন $-x$ আর x দুদিক থেকে সাঁড়াশীর মত আমাদের function-টাকে চেপে রেখেছে। এদিকে $x \to 0$, তাই $-x \to 0$. সুতরাং সাঁড়াশীর দুই চোয়ালই ক্রমশঃ 0-র দিকে চেপে আসছে, তাই আমাদের function-টার পক্ষে 0-তে যাওয়া ছাড়া গত্যন্তর নেই। অতএব উত্তর হল (A). ■

আমরা যাকে সাঁড়াশী বললাম, অংকের জগতে তাকেই একটু নরম উপমা দিয়ে বোঝানো হয়, sandwich. সাঁড়াশীর দুটো চোয়াল যেন sandwich-এর দুপাশের পাঁউরুটি দুটো, আর আমাদের function-টা হল sandwich-এর ভিতরের খাবারটা। অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখলে এরকম হয়--

Sandwich law

Let $f(x), \ell(x)$ and $r(x)$ be three functions such that for all x

$$\ell(x) \le f(x) \le r(x) \text{ or } r(x) \le f(x) \le \ell(x).$$

If $\lim_{x\to a} \ell(x) = \lim_{x\to a} r(x) = L$, then we must have $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

নীচের অংকটা sandwich law-এর আরেকটা প্রয়োগ।

Example 38: Let $[x]$ denote the greatest integer less than or equal to x for any number x. Then $\lim_{n\to\infty} \frac{[n\sqrt{2}]}{n}$ is equal to

(A) 0 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

(JEE2014.56)

SOLUTION: এই অংকটা দেখলেই প্রথম যেটা চোখে পড়া উচিত, সেটা হল এই যে, $\frac{[n\sqrt{2}]}{n}$ জিনিসটা বেশ ছিমছাম। বস্তুতঃ উপরে নীচে n-টা কাটাকাটি করে দিতে পারলেই খালি $\sqrt{2}$ পড়ে থাকে। সমস্যা বাঁধিয়েছে খালি ওই box-টা। কিন্তু কোনো সংখ্যার box নিলে সংখ্যাটা সামান্যই বদলায়, যেমন ধরো একটা লোক 1000.56 টাকা মায়না পায়, যদি তার box নাও, তবে মায়নাটা কমে হবে 1000, খুব সামান্যই কমবে, লোকটা টেরও পাবে না! সুতরাং উপরতলার $[n\sqrt{2}]$-টার জায়গায় খালি $n\sqrt{2}$ লিখলেও ব্যাপারটা মোটের উপর একই থাকা উচিত বলেই মনে হচ্ছে। এই চিন্তাটাকেই গুছিয়ে লেখার জন্য sandwich law কাজে দেবে, এইভাবে-- আমরা এখানে মাথা ঘামাচ্ছি $n\sqrt{2}$ আর $[n\sqrt{2}]$-র পার্থক্য নিয়ে, মানে $n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}]$ নিয়ে। যে কোনো সংখ্যা x-এর জন্যই $x-[x]$ সর্বদা $[0,1)$-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য। এদিকে নীচে একটা n আছে, যেটা ∞-র দিকে যাচ্ছে, তাই পুরো জিনিসটাকে সেটা 0-র দিকে টেনে নামাবে। সুতরাং দাঁড়াচ্ছে

$$\frac{[n\sqrt{2}]}{n} = \frac{n\sqrt{2}-(n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}])}{n} = \frac{n\sqrt{2}}{n} - \frac{n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}]}{n} = \sqrt{2} - \frac{n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}]}{n}.$$

এদিকে $n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}] \in [0,1)$, তাই

$$0 \leq \frac{n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}]}{n} < \frac{1}{n}.$$

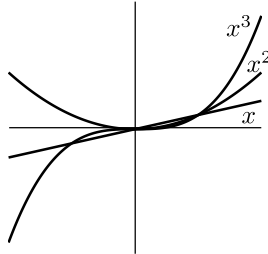
আমাদের sandwich-এর একদিকে 0, আর অন্য দিকে $\frac{1}{n}$, যেটা 0-র দিকে নেমে আসছে। সুতরাং মাঝের জিনিসটা আর যায় কোথায়, সেও 0-তে যেতে বাধ্য। অতএব উত্তর হল (C). ■

26.2 Rate

এবার আমরা একটা ধারণা নিয়ে আলোচনা করব, যেটা অনেক সময়েই খুব কাজে লাগে, বিশেষ করে MCQ-এর উত্তর আন্দাজ করার কাজে। ধাপে ধাপে এগোব।

26.2.1 প্রথম ধাপ

Example 39: Fig 28-এ x, x^2 আর x^3-এর গ্রাফ দেখিয়েছি $x>0$-এর জন্য। চেহারাগুলো আমাদের চেনা, যতই x বাড়ছে, এরা প্রত্যেকেই ∞-র দিকে যাচ্ছে। কিন্তু সকলেই কি একই সঙ্গে যাচ্ছে, নাকি কেউ বেশী তাড়াতাড়ি আর কেউ বেশী ধীরে ধীরে যাচ্ছে?

Fig 28

SOLUTION: এখানে x^3 বাড়ছে সবচেয়ে তাড়াতাড়ি, x^2-এর বৃদ্ধির হার তার চেয়ে কম, আর সবচেয়ে ধীরে ধীরে বাড়ছে x. যেমন ধরো x যখন বেড়ে 1000 হবে, তখন x^2 বেড়ে হবে 1000000, আর x^3 হবে 1000000000. ■

কে কত তাড়াতাড়ি এগোচ্ছে, সেটাকে বলে তার **rate.** যেমন এদের তিনজনের মধ্যে--

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty,$$

প্রথমজনের rate সবচেয়ে কম, দ্বিতীয়জনের তার চেয়ে বেশী, আর তৃতীয়জনের সবচেয়ে বেশী। এই rate-এর তারতম্যের ব্যাপারটা আমরা যেমন গ্রাফ এঁকে বুঝতে পারি, তেমনি অংক কষেও বুঝতে পারি। সেইটা এবার বলি। তার জন্য এই জিনিসটা দ্যাখো--যদি

$$\text{কোনো কিছু} \to \infty$$

হয়, তবে

$$\frac{1}{\text{সেই জিনিসটা}} \to 0$$

হবেই। এটা বোঝাই যায়, একটা রুটিকে 3 ভাগ করলে প্রত্যেকের ভাগে পড়ে $\frac{1}{3}$ করে, সেই একই রুটি যদি 10 জনের মধ্যে ভাগ করতে হত, তবে প্রত্যেকেই আরো কম কম করে মোটে $\frac{1}{10}$ অংশ পেত। নীচতলার সংখ্যাটা যতই বাড়বে, ভগ্নাংশটা ততই কমতে কমতে শূন্যর দিকে যাবে।

এই কথাটা মাথায় রেখে তুলনা করব, x^2 আর x^3-এর মধ্যে কার rate বেশী। তার জন্য দুজনের মধ্যে লড়াই বাঁধিয়ে দেব এইভাবে--

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = ?$$

হাতিমির দশা দ্যাখো, তিমি ভাবে জলে যাই
হাতি বলে এই বেলা জঙ্গলে চলো ভাই।

--সুকুমার রায়

এখানে উপরতলার x^3-টা চেষ্টা করছে limit-টাকে ∞ বানাতে, আর নীচের তলার x^2-টা চেষ্টা করছে 0-র দিকে টেনে নামাতে।
এখানে অবশ্য এই যুদ্ধের নিষ্পত্তি খুব সহজেই হবে, কারণ $\frac{x^3}{x^2} = x$, যেটা ∞-তে যাচ্ছে। তার মানে x^3-ই জিতল। অতএব আমরা গ্রাফের দিকে না তাকিয়েই বলতে পারলাম যে, x^3-এর rate-টা x^2-এর rate-এর চেয়ে বেশী। একইরকম যুক্তিতে বোঝা যায় যে, $a > b > 0$ হলে x^a-র rate হবে x^b-এর rate-এর চেয়ে বেশী।
এবার আরেকটু কঠিন করি ব্যাপারটাকে।

26.2.2 দ্বিতীয় ধাপ

Example 40: বলো তো $x \to \infty$ হলে $x^5 + x^2$ আর x^4-এর মধ্যে কার ∞-তে যাওয়ার rate বেশী?

SOLUTION: লড়াই বাঁধিয়ে দেওয়া যাক--

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^2}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = \infty,$$

কারণ $x \to \infty$ আর $\frac{1}{x^2} \to 0$. তার মানে x^4-এর চেয়ে $x^5 + x^2$-এর rate বেশী হচ্ছে। ■

এখানে $x^5 + x^2$ যে জিতল, সেটা ওর টীমে x^5-টা থাকার জন্য। এখানে x^2-এর কোনো ভূমিকা ছিল না। যে কোনো polynomial-এর ক্ষেত্রেই কথাটা খাটে, সবচেয়ে বড় যে power-টা উপস্থিত থাকবে polynomial-টার মধ্যে, সে-ই rate-টা ঠিক করে দেবে। তাই যে polynomial-এর degree বেশী, তার rate-ও বেশী।

কিন্তু যদি দুটো সমান degree-ওয়ালা polynomial-এর মধ্যে লড়াই বাঁধে? নীচের অংকে ঠিক সেটাই হয়েছে।

Example 41: এদের মধ্যে কার rate বেশী?

$$x^3 - 3x + 1 \text{ আর } 10x^3 + x^2 + x + 5.$$

SOLUTION: লড়াই বাঁধাও--

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{10x^3 + x^2 + x + 5}$$

এবার x-এর সবচেয়ে বড় power-টা দিয়ে (মানে x^3 দিয়ে) উপর নীচ দুদিককেই ভাগ করে দেব।

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{10 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}$$

এবার $\frac{1}{x^k}$ জাতীয় term-গুলো 0-তে যাবে।

বেঁচে থাকবে খালি উপরতলার 1 আর নীচের তলার 10.

$$= \frac{1}{10}.$$

এখানে লড়াইটা ড্র হয়ে গেল, কারণ উপরতলার $x^3 - 3x + 1$-টা limit-টাকে ∞-তে টেনে তুলতে পারল না। আবার নীচের তলার $10x^3 + x^2 + x + 5$-ও কিন্তু limit-টাকে 0-তে টেনে নামাতে পারল না। তাই এখানে আমরা বলব যে, এদের দুজনের rate-ই সমান। ■

একই যুক্তিতে বোঝা যাচ্ছে যে--

> যখন $x \to \infty$ হবে, তখন কোনো polynomial-এর degree-টাই তার rate-এর পরিমাপ। যত বেশী degree, তত বেশী rate. দুটো polynomial-এর degree সমান হলে, তাদের rate-ও সমান হতে বাধ্য।

এবার আরেক ধাপ এগোই।

26.2.3 তৃতীয় ধাপ

Example 42: আমরা জানি যে, $x \to \infty$ হলে e^x আর x^{10} দুজনেই ∞-তে যায় (এটা গ্রাফ দুটো কল্পনা করলেই বোঝা যায়)। এদের মধ্যে কার rate বেশী?

SOLUTION: এবার যদি সরাসরি লড়াই বাঁধাই, মানে এই limit-টা বার করতে যাই--

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10}},$$

তবে মুস্কিল আছে, কারণ e^x-এর সঙ্গে কোনো কাটাকাটি করার কোনো পথ চোখে পড়ছে না। এবার একটু ঘুরপথে এগোব। আমরা দেখেছিলাম যে, কোনো polynomial-এর rate নির্ধারণ করে দেয় ওর মধ্যে উপস্থিত সবচেয়ে বড় power-টা। এদিকে আমরা জানি যে--

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

তার মানে $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ ইত্যাদি যত রকম power সম্ভব, তারা সকলেই e^x-এর মধ্যে আছে। সুতরাং x^{10}-এর চেয়ে বড় power-রাও আছে। অতএব তাদের কল্যাণে e^x-এর rate অতি অবশ্যই x^{10}-এর rate-এর চেয়ে বেশী হবে। ■

এই উদাহরণটা একবার বুঝে গেলে এটাও বোঝা উচিত যে--

> যখন $x \to \infty$ হবে, তখন e^x-এর rate-টা যেকোনো x^n-এর rate-এর চেয়ে বেশী, তাই যে কোনো polynomial-এর rate-এর চেয়েও বেশী।

একই রকম যুক্তিতে নীচের অংকটাও করতে পারবে।

Exercise 12: দেখাও যে--

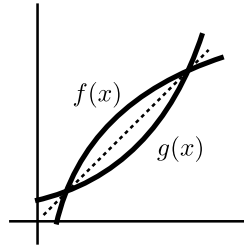
1. e^{3x}-এর rate-টা যে কোনো polynomial-এর rate-এর চেয়ে বেশী।
2. $e^{\sqrt{x}}$-এর rate-টা যে কোনো polynomial-এর rate-এর চেয়ে বেশী।

■

26.2.4 চতুর্থ ধাপ

এই বইয়ের প্রথম অধ্যায়ে আমরা function-দের inverse নিয়ে আলোচনা করেছিলাম, মনে আছে? যেমন "1 যোগ করা"-র উল্টো হল "1 বিয়োগ করা", অর্থাৎ $f(x) = x + 1$-এর inverse হল $g(x) = x - 1$. তেমনি $f(x) = x^3$ হলে তার inverse হবে $g(x) = x^{1/3}$, মানে cube root, এইরকম। যদি কোনো $f(x)$-এর inverse হয় $g(x)$, তবে $f(x)$-এর গ্রাফ থেকে কী করে $g(x)$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়, সেটাও বলেছিলাম--$45\deg$ লাইনটা বরাবর প্রতিফলিত করলেই হয় (Fig 29)। এই প্রতিফলনের ব্যাপারটার সঙ্গে rate-এর একটা গল্প জড়িয়ে আছে, যেটা Fig 29-এর দিকে তাকালেই বুঝতে পারবে। $f(x)$-এর গ্রাফটা যত খাড়াভাবে ∞-র দিকে যাবে, তার inverse-এর গ্রাফটা ততই বেশী নুয়ে পড়বে। তাই $f(x)$-এর rate যত বাড়বে, তার inverse-এর rate ততই কমবে। যেমন x^5-এর rate হল x^3-এর rate-এর চেয়ে বেশী, তাই $x^{1/5}$-এর rate হবে $x^{1/3}$-এর rate-এর চেয়ে কম।
আমরা আগেই শিখেছি যে, e^x-এর inverse হল $\log_e x$. যেহেতু e^x-এর rate-টা যেকোনো $x^a \quad (a > 0)$-এর rate-এর চেয়ে বেশী , তাই--

> যখন $x \to \infty$ হয়, তখন $\log_e x$-এর rate-টা যেকোনো $x^a \quad (a > 0)$-এর rate-এর চেয়ে কম হতে বাধ্য। সুতরাং যেকোনো polynomial-এর rate-এর চেয়েও $\log_e x$-এর rate কম হবে।

Fig 29

যেমন ধরো, যদি দেখাতে চাই যে, $\log_e x$-এর rate-টা $\sqrt{x}$-এর rate-এর চেয়ে কম হবে, তবে প্রথমে ওদের inverse-দের মধ্যে তুলনা করব, মানে e^x আর x^2. এদের মধ্যে e^x-এর rate বেশী, সুতরাং গোড়াতে $\log_e x$-এর rate নিশ্চয়ই কম ছিল।
Rate-এর ধারণাটা মাথায় রাখলে e^x, $\log_e x$ আর polynomial-ওয়ালা অনেক limit চট্ করে বার করে ফেলা যায়, যেগুলো অন্যভাবে করতে গেলে অনেক কঠিন হত। এবার সেরকম একটা উদাহরণ দেখব।

Example 43: A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

Then

(A) f is not continuous

(B) f is differentiable but f' is not continuous

(C) f is continuous but $f'(0)$ does not exist

(D) f is differentiable and f' is continuous.

(Bstat/Bmath2012short.7)
SOLUTION: অংকটা প্রথমে দেখলে মনে হতে পারে যে, এটা সেই আমাদের পূর্বপরিচিত প্যাটার্নের অংক যেখানে

$$f(x) = \begin{cases} \ell(x) & \text{if } x \leq a \\ r(x) & \text{if } x > a \end{cases}.$$

সেরকম অংকে $x = a$-তে continuity পরীক্ষা করার জন্য $\ell(a) = r(a)$ কিনা দেখলেই চলত। সমস্যা হল এখানে ডানদিকের অংশটা হচ্ছে $r(x) = e^{-1/x}$, যেটা $x = 0$-তে defined-ই নয়! অতএব এখানে আমাদেরকে পরীক্ষা করে দেখতে হবে $\lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = 0$ হচ্ছে কিনা। এর জন্য $\frac{1}{x}$-কে একটা নতুন নাম দিই, ধরো u. এবার দুইধাপে এগোও--

- যখন $x \to 0+$ তখন $\frac{1}{x} \to \infty$ হয়, সেটা $\frac{1}{x}$-এর গ্রাফটা ভাবলেই বুঝবে (Fig 30)। তার মানে $u \to \infty$.
- যখন $u \to \infty$, তখন $e^{-u} \to 0$ হয়। সেটা বুঝবে e^{-u}-এর গ্রাফটা কল্পনা করলেই (Fig 31)।

সুতরাং দুটো ধাপ মিলিয়ে পেলাম $\lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = 0 = f(0)$, অতএব continuous.
এবার differentiable কিনা পরীক্ষা করতে হবে। বাঁদিকের অংশ হল 0, যেটা অবশ্যই differentiable, এবং derivative হল 0.

Fig 30

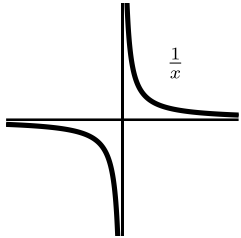
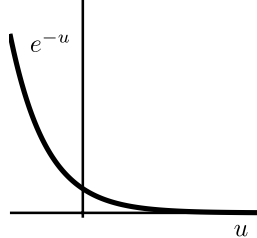



Fig 31

ডানদিকের অংশ হল $r(x) = e^{-1/x}$, যার derivative হল $r'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$. সমস্যা হল এই যে, $x = 0$-তে এটা undefined. সুতরাং এখানে $r'(x) = 0$ হচ্ছে কিনা দেখলেই চলবে না। এখানে সরাসরি differentiation-এর সংজ্ঞা লাগাতে হবে, মানে দেখতে হবে

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x} - 0}{x} = 0$$

হচ্ছে কিনা। আবার আমরা $u = \frac{1}{x}$ নেব। তাহলে $x \to 0+$ মানে $u \to \infty$. সুতরাং limit-টা হচ্ছে

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u}.$$

এখানে e^u-এর rate-টা বেশী হওয়ায় limit-টা 0 হবে। সুতরাং differentiable হচ্ছে। তাহলে derivative-টা দাঁড়াচ্ছে--

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

এবার প্রশ্ন হল এটা continuous কিনা। তার জন্য দেখতে হবে

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2}e^{-1/x} = 0$$

কিনা। যদি $u = \frac{1}{x}$ বসাই তবে দেখতে হবে

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u^2}{e^u} = 0$$

কিনা। আবার rate দিয়ে ভাবলেই বুঝবে যে, উত্তর হল হ্যাঁ।
সুতরাং অংকটার উত্তর হবে (D). ■

26.3 Series

এবার limit বার করার আরেকটা কায়দা শিখব, যেটা সিলেবাসের ভিতরে না পড়লেও, MCQ-এর উত্তর আন্দাজ করার পক্ষে ভালো শর্টকাট।
তুমি শিখেছ যে

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

এইটা হল যাকে বলে একটা **infinite series**. এরকম আরেকটা series-এর কথাও তুমি জানো--

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + - + \cdots, \quad |x| < 1.$$

এরকম আরো তিনটে দিচ্ছি, যাদের তুমি আগে হয়তো দ্যাখো নি--

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + - + \cdots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + - + \cdots, \quad x \in \mathbb{R},$$

আর

$$(1+x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots, \quad |x| < 1,$$

যেখানে $a \in \mathbb{R}$ যেকোনো সংখ্যা, এবং

$$\binom{a}{r} = \frac{a(a-1)\cdots(a-r+1)}{r!}.$$

এগুলো মনে রাখলে কীরকম সুবিধা হবে, সেটা নীচের অংকটা করলেই বুঝবে।

Example 44: If $\lim_{x\to 0} \frac{axe^x - b\log(1+x)}{x^2} = 3$ then the values of a, b are respectively

1. 2,2
2. 1,2
3. 2,1
4. 2,0.

(JEE2015.50)

SOLUTION: উপরতলায় আছে $axe^x - b\log(1+x)$, যাকে series দিয়ে লিখলে হয়--

$$ax\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) - b\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + - + \cdots\right).$$

নীচে আছে খালি x^2. যেহেতু limit-টা হল $3 \in (0,\infty)$, তাই উপরতলা আর নীচের তলার rate সমান, মানে উপরতলার series-টা আসলে $3x^2$ থেকে শুরু, অর্থাৎ x-এর coefficient হল 0, আর x^2-এর coefficient হল 3. এ থেকে পাচ্ছি--

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \\ a + \frac{b}{2} &= 3. \end{aligned}$$

বুঝতেই পারছ যে, উত্তর হবে (A). ■

Example 45: $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\sqrt{1+x} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right\}$

(A) does not exist. (B) is equal to $\frac{1}{2}$ (C) is equal to 0 (D) is equal to 1.

(JEE2013.22)

SOLUTION: এই অংকটায় একটা ফাঁদ আছে। আমরা অনেক সময়েই ফস্ করে লিখে ফেলি $\sqrt{x^2} = x$. সেটা কিন্তু ঠিক নয়। যেমন $x = -2$ হলে $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$. আসলে লেখা উচিত $\sqrt{x^2} = |x|$. সেটা মাথায় রেখে এগোলে--

$$\frac{1}{x}\sqrt{1+x} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{1+x} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}. \qquad (*)$$

যেই $|x|$ এসে গেল, তাই $x < 0$ আর $x > 0$ এই দুটো কেসে ভেঙে নিলে সুবিধা হবে। যদি $x > 0$ হয়, তবে এটা হবে

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x^2+1}}{x}.$$

এটা $\frac{0}{0}$ চেহারার। এর উপর নীচে $\sqrt{1+x}+\sqrt{x^2+1}$ দিয়ে গুণ করে a^2-b^2 সূত্র লাগালে পাবে

$$\frac{(1+x)-(x^2+1)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{x^2+1})}=\frac{(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x^2+1}}.$$

এইটা আর মোটেই $\frac{0}{0}$ চেহারার নয়, limit নিলে হচ্ছে $\frac{1}{2}$. দাঁড়াও, এটুকু দেখেই উৎসাহের চোটে (B)-তে দাগ দিয়ে দিও না। এটা বেরোলো right hand limit-টা, কারণ আমরা $x>0$ ধরে কাজ করছিলাম। যদি $x<0$ হয় তবে (*) হবে

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

এটা কিন্তু মোটেই $\frac{0}{0}$ চেহারার নয়। এখানে উপরতলাটা যাচ্ছে 2-এর দিকে, নীচের তলা যাচ্ছে 0-র দিকে। সুতরাং আর যাই হোক, এই limit-টা $\frac{1}{2}$ হতে পারে না। তাই এখানে উত্তর (A).

বিকল্প পদ্ধতি

অংকটা মোটেই সহজ বলা যায় না, বেশ অনেকটা কষে তবে উত্তরটা বোঝা গেল। Series ব্যবহার করলে এর আগেই উত্তরটা আন্দাজ করা যেত।

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}}{x} &= \frac{1}{x}(1+x)^{1/2}\\ &= \frac{1}{x}\left(1+\tfrac{x}{2}+(x^2,x^3\text{ ইত্যাদি})\right)\\ &= \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{2}+(x,x^2\text{ ইত্যাদি})\end{aligned}$$

এবার $x\to 0$ হলে এর মধ্যে ঝামেলা পাকাতে পারে খালি $\frac{1}{x}$-টা। এবার অন্য অংশটা দেখি--

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} &= \frac{1}{|x|}\left(1+\tfrac{x^2}{2}+(x^4,x^6\text{ ইত্যাদি})\right)\\ &= \tfrac{1}{|x|}+\tfrac{x^2}{2|x|}+\left(\tfrac{x^4}{|x|},\tfrac{x^6}{|x|}\text{ ইত্যাদি}\right)\end{aligned}$$

এখানে ঝামেলা বাঁধাতে পারে খালি $\frac{1}{|x|}$-টা, বাকিরা সবাই 0-র দিকে যাবে। সুতরাং দুটো অংশের ঝামেলাজনক জিনিস দুটো মিলে হল

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}.$$

পুরো limit-টার আচরণ এটারই উপর নির্ভর করছে। যদি $x>0$ হয়, তবে এটা 0. যদি $x<0$ হলে তবে $\frac{2}{x}$, যার limit হল $-\infty$ (যেহেতু $x<0$)। সুতরাং উত্তর হল (A).

Series দিয়ে করার সুবিধাটা হল এই যে, এখানে আমরা ঝামেলাজনক জিনিসটুকুকে ছেঁকে বার করে আনতে পারলাম। যদি square root-এর জায়গায় cube root-ও থাকত, তবেও এই কায়দাটা একইভাবে কাজ করত, কিন্তু প্রথম কায়দাটা সেখানে বেজায় কঠিন হয়ে উঠত। ■

DAY 27
Sequence

Sequence মানে এমন সব function যাদের domain হল $\mathbb{N}$, যেমন $f(n) = 2n, \quad (n \in \mathbb{N})$ বা $g(n) = \frac{1}{n}, \quad (n \in \mathbb{N})$. এদের গ্রাফ হয় পর পর ডট্ ডট্ বসিয়ে তৈরী (যেমন Fig 32)। চিন্তা করার সময়েও তাই এদেরকে function বলে না ভেবে পরপর সংখ্যার তালিকা বলে ভাবলেই বেশী সুবিধা হয়, যেমন $f(n) = n^2$ হলে তালিকাটা হল--

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

মানে যাবতীয় square number-এর তালিকা। ওই যে শেষে ... লিখেছি, ওতেই বোঝা যাচ্ছে যে, এ তালিকার কোনো শেষ নেই। আরেকটা notation-এর কথাও এখানে বলে রাখি। Sequence-এর বেলায় লোকে $f(n)$ বা $g(m)$ এরকম না লিখে f_n বা g_m লেখে। কেন এরকম লেখে ভগবান জানে, কিন্তু লেখে তাই বললাম!

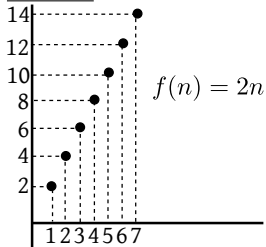
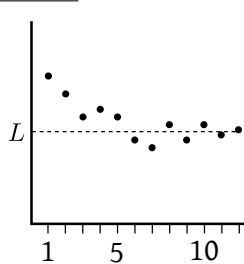
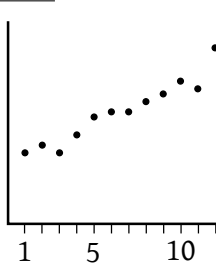
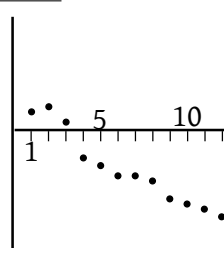
Sequence-দের নিয়ে অনেক রকম অংক হতে পারে। আমরা এখানে খালি একধরণের অংকই করব--sequence-দের limit বার করা, অর্থাৎ কোনো একটা sequence দেওয়া থাকবে a_n, আর আমাদের বার করতে হবে $\lim_{n\to\infty} a_n$. ব্যাপারটা প্রথমে ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। Fig 33-এ একটা sequence-এর গ্রাফ এঁকেছি। লক্ষ করো যে, যতই ডানদিকে যাচ্ছি ডট্গুলোর ওঠানামাও ততই নিস্তেজ হয়ে আসছে, এবং ওই ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটার গায় মিশে যাচ্ছে। ওই লাইনটার উচ্চতা (মানে L)-ই হল এখানে sequence-টার limit. এরকম যেসব sequence-দের limit হয় কোনো $L \in \mathbb{R}$, তাদের বলে **convergent sequence**. আবার যদি Fig 34 দ্যাখো, সেখানে ডট্গুলোর ঝোঁক হচ্ছে উপরে ঠেলে ওঠা। মাঝে মাঝে নামছে বটে, কিন্তু উঠছেই বেশী, উঠতে উঠতে একেবারে মহাকাশ ফুঁড়ে বেরিয়ে যাবে। এখানে limit-টা হল ∞. এদেরকে আমরা বলি **divergent sequence**. আরেকধরণের divergent sequence হল Fig 35-র মত, এখানে limit-টা হল $-\infty$. এই তিন রকমের বাইরেও আরেক ধরণের sequence সম্ভব, যেখানে কোনোই limit নেই, একটা উদাহরণ হল $a_n = (-1)^n$. তালিকার আকারে লিখলে হয়--

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

দেখতেই পারছ যে, এর লাফালাফি কোনোদিনই শেষও হবে না, নিস্তেজও হবে না। এদেরকে বলে **oscillating sequence**. এদের limit-ই থাকে না। আমাদের অংকগুলোতে oscillating sequence-দের দেখা মিলবে না। আমরা মূলতঃ কাজ করব convergent-দের নিয়েই, তবে মাঝেসাঝে divergent-রা একটু উঁকি দেবে। আমরা কয়েক ধরণের কায়দা শিখব।

27.1 প্রথম ধরণ

এখানে আমাদের এই কটা কথা মনে রাখলেই হবে--

- $a_n = n, b_n = n^2, c_n = n^3$, ইত্যাদিরা সবাই divergent, এবং এদের limit হল ∞.
- যদি কোনো divergent sequence থাকে r_n, তবে $\frac{1}{r_n}$-এর limit অবশ্যই 0 হতে বাধ্য। সুতরাং $\frac{1}{n}$-এর limit, বা $\frac{1}{n^2}$-এর limit, ইত্যাদিরা সবাই 0.

এদের ব্যবহার করে কয়েকটা অংক করা যাক।

Example 46: যদি $a_n = -3n^3 + 4n^2 + 100n + 200$ হয়, তবে $\lim_{n\to\infty} a_n$ কত হবে?

SOLUTION: এখানে a_n হল n-এর একটা polynomial. এই polynomial-টার degree হল 3, আর সবচেয়ে বড় power-টার coefficient হল $-3 < 0$. সুতরাং যত ডানদিকে যাবে, ততই নামতে থাকবে অতলের দিকে। তাই limit-টা হবে $-\infty$. একই সিদ্ধান্তে আরেকভাবেও পৌঁছনো যায়--এখানে n-এর সবচেয়ে বড় power হল n^3, সেটাকে "কমন" নিয়ে নিলে হয়

$$-3n^3 + 4n^2 + 100n + 200 = n^3\left(-3 + \frac{4}{n} + \frac{100}{n^2} + \frac{200}{n^3}\right).$$

লক্ষ করো যে, ব্র্যাকেটের মধ্যে প্রথমে যে -3-টা আছে, সেটা বাদে বাকিরা সবাই 0-র দিকে যাচ্ছে। তাই পুরো ব্র্যাকেটের জিনিসটা -3-এ যাবে। ওদিকে বাইরের n^3-টা যাবে ∞-তে, তাই সব মিলিয়ে a_n যাবে $-\infty$-তে। ■

এবার সামান্য কঠিন অংক--

Example 47: $\lim_{n\to\infty} a_n$ বার করো, যেখানে

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 5}{3n^2 + 5n - 9}.$$

SOLUTION: উপর নীচ দু দিকেই n-এর সবচেয়ে বেশী power হল n^2. সেটাকে "কমন" নিয়ে নিলে--

$$a_n = \frac{n^2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{5}{n} - \frac{9}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{5}{n} - \frac{9}{n^2}} \to \frac{1}{3},$$

কারণ $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \to 0$. ■

Exercise 13: The value of $\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$ is:

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 1 (D) 4

(BStat/BMath2015.22)
HINT: এখানে খালি মনে রাখতে হবে যে

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

এবার উত্তরটা লিখে ফেলা কঠিন নয়। ■

Exercise 14: Let

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2\left(1 - \frac{1}{10}\right)^2\cdots\left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^2.$$

Then the value of $\lim_{n\to\infty} x_n$ is

(A) 1/3 (B) 1/9 (C) 1/81 (D) 0.

(JEE2015.38)
HINT:
এখানে অনেকগুলো একইরকম জিনিস পরপর গুণ করে x_n তৈরী। প্রতিটা জিনিসই $\left(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}\right)^2$-এর মত দেখতে। যদি $k=2$ বসাও তবে পাবে প্রথম জিনিসটা মানে $\left(1-\frac{1}{3}\right)^2$, আর $k=n$ বসালে পাবে শেষেরটা। আমরা square-এর ভিতরের জিনিসটা, মানে $1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$-কে একটু দলাই-মলাই করি--

$$1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}.$$

তাহলে x_n হল

$$x_n=\left(\frac{1\times 4}{2\times 3}\times\frac{2\times 5}{3\times 4}\times\frac{3\times 6}{4\times 5}\times\cdots\times\frac{(n-1)\times(n+2)}{n\times(n+1)}\right)^2$$

লক্ষ করো প্রায় সবকিছুই পরপর কাটাকাটি হয়ে যাচ্ছে। খালি প্রথম term-এর $\frac{1}{3}$ আর শেষের term-এর $\frac{n+2}{n}$ পড়ে থাকছে। তার মানে

$$x_n=\left(\frac{n+2}{3n}\right)^2.$$

এর limit-টা কী হবে সেটা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ? ■

Example 48: Let t_n denote the n-th term of the infinite series

$$\frac{1}{1!}+\frac{10}{2!}+\frac{21}{3!}+\frac{34}{4!}+\frac{49}{5!}+\cdots.$$

Then $\lim_{n\to\infty} t_n$ is

(A) e (B) 0 (C) e^2 (D) 1.

(JEE2014.71)
SOLUTION: এখানে প্রথম সমস্যা হল t_n-এর কোনো ফর্মুলা দেয় নি, খালি প্রথম কয়েকটা কেস বলে ছেড়ে দিয়েছে, যেমন--

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{1!}\\ t_2 &= \frac{10}{2!}\\ t_3 &= \frac{21}{3!}\\ &\vdots \end{aligned}$$

এইরকম। আমাদের প্রথম কাজ হল এই কেসগুলো দেখে t_n-এর general ফর্মুলাটা আন্দাজ করা। একটা জিনিস বোঝাই যাচ্ছে t_n-এর নীচের তলায় থাকবে $n!$. উপরতলার জিনিসগুলোকে ভালো করে খুঁটিয়ে দেখলে দেখবে যে, ওরা $9, 11, 13, \ldots$ করে করে বাড়ছে, যেমন $1+9=10$, তারপর $10+11=21$, তারপর $21+13=34$, এইরকম। সুতরাং t_n-এর উপরতলাটা হবে

$$1+(\underbrace{9+11+\cdots}_{n-1\text{ terms}}).$$

তোমরা যারা একটা AP পেলেই ধাঁ করে তার যোগফল বার করতে পারো, তারা হয়তো চোখের নিমেষেই ফর্মুলাটা পেয়ে যাবে। বাকিরা এভাবে ধাপে ধাপে এগোতে পারো--

$$1+(\underbrace{9+11+13+\cdots}_{n-1 \text{ terms}})$$

এই $(n-1)$-টা term-এর প্রত্যেকটার মধ্যেই একটা করে 9 আছে। ওদেরকে বার করে আনো--

$$= 1+9(n-1)+(\underbrace{0+2+4+\cdots}_{n-1 \text{ terms}})$$

শুরুর 0-টা বাদ দিলে পড়ে থাকে $n-2$-টা term.

$$= 1+9(n-1)+(\underbrace{2+4+\cdots}_{n-2 \text{ terms}})$$

এবার 2 'কমন' নিয়ে নাও।

$$= 1+9(n-1)+2(\underbrace{1+2+\cdots}_{n-2 \text{ terms}})$$

আমরা জানি $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ হয়। এখানে $k=n-2$.

$$= 1+9(n-1)+2\times\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

এবার খালি একটু গুছিয়ে লেখার অপেক্ষা।

$$= \cdots = n^2+6n-6.$$

তার মানে সব মিলিয়ে দাঁড়ালো

$$t_n = \frac{n^2+6n-6}{n!}.$$

এবার লক্ষ করো যে, নীচের তলায় $n!$-এ মধ্যে $n(n-1)(n-2)$ তো আছেই ($n \geq 3$ হলে)। যেহেতু $n(n-1)(n-2)$-এর degree হল 3, তাই উপরতলার polynomial-টা (যার degree মোটে 2) ওর সঙ্গে এঁটে উঠতে পারবে না। তাই $t_n \to 0$ হতে বাধ্য। সুতরাং উত্তর হল (B). ■

27.2 দ্বিতীয় ধরণ

যদি $a \in \mathbb{R}$ হয়, তবে a^n-এর আচরণটা মনে রেখো--

- যদি $a=1$ হয়, তবে বুঝতেই পারছ যে, sequence-টার প্রতিটা term-ই হল 1. তাই limit-ও 1.
- যদি $a>1$ হয়, তবে limit হল ∞. যেমন $a=2$ নিলে sequence টা হল $2,4,8,16,32,\ldots$ দেখাই যাচ্ছে কেমন লাফিয়ে লাফিয়ে বাড়ছে।
- যদি $a \in (-1,1)$ হয়, তবে limit-টা 0 হবে, যেমন $a=0.1$ নিলে sequence-টা হল $0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots$
- যদি ≤ -1 হয়, তবে sequence-টা oscillating. যেমন $a=-2$ নিলে হয় $-2,4,-8,16,\ldots$

Example 49: Let $\alpha > 0$ and consider the sequence

$$x_n = \frac{(\alpha+1)^n + (\alpha-1)^n}{(2\alpha)^n}, \quad n = 1, 2, ...$$

Then $\lim_{n\to\infty} x_n$ is

(A) 0 for any $\alpha > 0$

(B) 1 for any $\alpha > 0$

(C) 0 or 1 depending on what α is

(D) 0, 1 or ∞ depending on what α is.

(Bstat/Bmath2012short.24)
SOLUTION: এরকম অংক হাতে পেলে প্রথমেই α-র কিছু সহজ value বসিয়ে দেখে নেওয়া ভালো sequence-টার আচরণ কীরকম হচ্ছে। তাতে খানিকটা গা গরমও হবে, আর ভাগ্য ভালো থাকলে কয়েকটা option বাদও হয়ে যেতে পারে। যদি $\alpha = 1$ বসাই, তবে sequence-টার প্রতিটা term-ই 1 হবে। সুতরাং (A)-টা বাদ হয়ে গেল। তারপর $\alpha = 2$ বসিয়ে দ্যাখো, দেখবে limit-টা 0 আসছে। সুতরাং (B)-ও বাদ হল। এবার লড়াই তাহলে (C) আর (D)-এর মধ্যে। $\alpha = 3, 4, ...$ ইত্যাদি নিয়ে খানিকক্ষণ গবেষণা করলে দেখবে, ওই 0-ই আসছে। এবার 1-এর চেয়ে ছোটো α নিয়ে দ্যাখো, ধরো $\alpha = \frac{1}{2}$. তবে দেখবে limit-টা ∞ হচ্ছে। ব্যস, উত্তর হল (D). ■

27.3 তৃতীয় ধরণ

আমরা গতকাল series ব্যবহার করে limit বার করার একটা কায়দা শিখেছিলাম। Sequence-এর limit বার করার জন্যও সেটা খাটানো যায়। তার একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 50: What is the limit of

$$\left(1 + \frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2+\sqrt{n}}$$

as $n \to \infty$?

(A) e (B) 1 (C) 0 (D) ∞.

(Bstat/Bmath2012short.19)
SOLUTION:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2+\sqrt{n}} = e^{(n^2+\sqrt{n})\log\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)}.$$

যেহেতু e^x হল continuous, তাই $(n^2+\sqrt{n})\log\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)$-এর limit বার করতে পারলেই হবে।
এর জন্য log-টাকে series দিয়ে লেখো--

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^2+n}\right) = \frac{1}{n^2+n} - \frac{1}{2(n^2+n)^2} + \frac{1}{3(n^2+n)^3} - + - + \cdots .$$

একে $n^2 + \sqrt{n}$ দিয়ে গুণ করে দিলে পাবে--

$$(n^2+\sqrt{n})\log\left(1 + \frac{1}{n^2+n}\right) = \frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2+n} - \frac{n^2+\sqrt{n}}{2(n^2+n)^2} + \frac{n^2+\sqrt{n}}{3(n^2+n)^3} - + - + \cdots .$$

Limit নিলেই দেখবে, প্রথম term-টা যাবে 1-এ, বাকিরা যাবে 0-তে। সুতরাং পুরোটার limit হচ্ছে 1. ভুলে যেও না যে, বাইরে একটা e^x আছে। তাই সব মিলিয়ে উত্তর হচ্ছে e^1, মানে (A). ■

27.4 চতুর্থ ধরণ

এবার একটা শর্টকাটের কথা বলি, যেটা সিলেবাসের বাইরে হলেও MCQ-এর উত্তর আন্দাজ করতে কাজে দেয়।
আমরা এটা জানি যে, $x \in (-1, 1)$ হলে

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

একে বলে **geometric series**.
এর দুইপাশকে differentiate করে দিলেই আরেকটা series পেয়ে যাবে--

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}. \qquad (*)$$

এখানে আমরা বাঁদিকের প্রতিটা term-কে আলাদা করে differentiate করেছি। চাইলে ফের দুইপাশকে differentiate করতে পারো, তবে পাবে আরো একটা series--

$$0 + 0 + 2 + 3 \times 2x + 4 \times 3x^2 + \cdots = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

চাইলে এর মধ্যে একটু কারুকার্যও করতে পারো, যেমন ধরো (*)-কে প্রথমেই differentiate না করে আগে x দিয়ে গুণ করে নিলে পাবে--

$$0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

এবার differentiate করলে পাবে আরো একটা series.

$$1 \times 1 + 2 \times 2x + 3 \times 3x^2 + \cdots = \frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

এইভাবে একটা series-কে দোহন করে একইরকম দেখতে গুচ্ছ গুচ্ছ series বানানো যায়। খালি ওই গোড়ার $x \in (-1, 1)$ শর্তটা কিন্তু সবার ক্ষেত্রেই রয়েছে। এই যে নানারকম series পাওয়া গেল, এদের যেন আবার খামোখা মুখস্থ করতে লেগে যেও না!
এইভাবে geometric series-এর কাছাকাছি দেখতে নানা অংককে চটপট ঘায়েল করা যায়। একটা উদাহরণ দেখি--

Example 51: Consider the sequence

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{2^r}, \quad n \geq 1.$$

Then the limit of u_n as $n \to \infty$ is

(A) 1 (B) 2 (C) e (D) $\frac{1}{2}$.

(Bstat/Bmath2012short.4)
SOLUTION: এখানে $\frac{1}{2}$-কে x লিখলে হয়তো বুঝতে একটু সুবিধা হবে--

$$\begin{aligned} u_1 &= x \\ u_2 &= x + 2x^2 \\ u_3 &= x + 2x^2 + 3x^3, \end{aligned}$$

ইত্যাদি।
সুতরাং আমাদের যে limit-টা বার করতে হবে, সেটা হল

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots .$$

জিনিসটা ঠিক geometric series নয়, কিন্তু তার সাথে খানিকটা মিল আছে, দেখি differentiate করে করে এখানে পৌঁছতে পারি কিনা।

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

একবার differentiate করলেই--

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

কাছাকাছি এসেছে, কিন্তু এখনও একটু পার্থক্য আছে, আমাদের বেলায় coefficient-গুলো exponent-গুলোর[3] চেয়ে 1 বেশী, কিন্তু অংকটায় ওরা সমান। সেটুকু সমস্যা মেরামত করে নেওয়া যাবে দুপাশকে x দিয়ে গুণ করে দিলেই--

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

এবার $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে দাও, উত্তর পাবে 2. তার মানে টিক পড়বে (B)-তে। ■

DAY 28
Continuity-র কঠিন অংক

এইবার আমরা continuous function নিয়ে কিছু অংক দেখব, যেগুলো অপেক্ষাকৃত কঠিন, কারণ এদের জন্য নতুন কিছু ধারণার প্রয়োজন হবে। এই ধারণাগুলো আগে সংক্ষেপে আলোচনা করে নিই।

28.1 Rational আর irrational

যে সব সংখ্যাকে ভগ্নাংশের আকারে লেখা যায়, যেমন $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{100}{25}, \frac{0}{2}, -\frac{3}{5}$ ইত্যাদি, তাদের বলে **rational** সংখ্যা। এদের চেহারাটা হল $\frac{p}{q}$-এর মত, যেখানে p, q হল integer (অবশ্যই $q \neq 0$ হতে হবে)[4]। Rational-দের মধ্যে integer-রাও আছে, যেমন 5 একটা integer, যাকে আমরা ভগ্নাংশের মত করে লিখতে পারি, $\frac{5}{1}$. বাংলায় rational number-দের বলে মূলদ সংখ্যা। এমনিতে rational মানে হল "যুক্তিপূর্ণ"। খামোখা কিছু সংখ্যাকে "যুক্তিপূর্ণ" আখ্যা দেবার কী কারণ থাকতে পারে? তার কারণ এই সংখ্যাগুলোকে প্রাচীন মানুষ সহজ বুদ্ধিতে বুঝতে পারত। ব্যাপারটা এইরকম--আজকের যুগে আমরা অংক বলতে অনেক জটিল জটিল জিনিসপত্র বুঝি, কিন্তু প্রাচীনকালে অংক বলতে লোকে বুঝত মোটামুটি দুইরকম জিনিস--কোনো কিছু গোণা, আর কোনো দৈর্ঘ্য মাপা। এদের মধ্যে প্রথমটা পশুপালকদের কাজে লাগত কতগুলো গরু মোষ আছে তার হিসেব রাখতে, আর দ্বিতীয়টা কাজে লাগত চাষীদের, জমি জরীপ করার জন্য। তাই এই দুই কাজের জন্য যা যা সংখ্যা লাগত, সে আমলের মানুষ তার চেয়ে বেশী খোঁজ রাখত না। গোণার জন্য লাগত $1, 2, 3, \ldots$ এই সব সংখ্যা। এদের বুঝতে যেহেতু সবচেয়ে সহজ, তাই এদের নাম দেওয়া হয়েছে **natural** সংখ্যা (বাংলায় স্বাভাবিক সংখ্যা)। জমি জরীপ করার জন্য লোকে কোনো একটা দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সেটা দিয়ে মাপত। সমস্যা হল উত্তরটা সবসময়ে একটা natural number নাও হতে পারে, যেমন দেখিয়েছি Fig 36-এ। তখন লোকে সেই এককটাকে কয়েকটা সমান ভাগে ভাগ করে আরো সূক্ষ্ম একক বানাতো, যেমন মিটারকে 100 ভাগ করে সেন্টিমিটার, বা ফুটকে 12 ভাগ করে ইঞ্চি, এইরকম (Fig 37)। এই কাজটা করতে গিয়েই ভগ্নাংশ এসে উপস্থিত হত। যেমন, 1 ফুট 4 ইঞ্চি মানে হল $1 + \frac{4}{12} = \frac{16}{12}$ ইঞ্চি। যদি তাতেও হিসেব না মেলে, তবে আরো সূক্ষ্ম ভাগ করতে হত, যেমন সেন্টিমিটার থেকে মিলিমিটার, এইরকম। এখন কথা হল চাষের কাজে ভীষণ সূক্ষ্ম মাপের দরকার

[3]কোনো power-এর উপরতলার সংখ্যাটাকে বলে exponent, যেমন x^2-এ exponent হল 2.

[4]কেউ কেউ বাড়তি শর্ত চাপান যে, p, q-কে relatively prime (পরস্পর মৌলিক) হতে হবে। সেটা অনাবশ্যক, $\frac{2}{4}$-ও অবশ্যই একটা rational সংখ্যা।

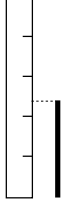
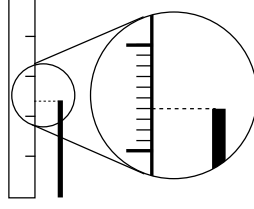
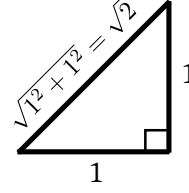
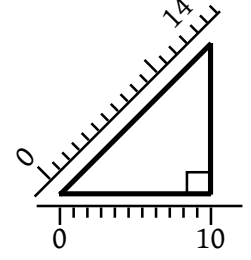



Fig 36 Fig 37 Fig 38 Fig 39

পড়ে না, তাই বার কয়েক ভাগ করলেই মোটামুটি কাজ চলে যায়। সেই কারণে প্রাচীন কালের মানুষদের ধারণা ছিল যে, যে কোনো দৈর্ঘ্যকেই এইভাবে মেপে ফেলা সম্ভব, অর্থাৎ সব সংখ্যাই দেখতে $\frac{m}{n}$-এর মত, যেখানে n হল কতভাগে ভাঙা হয়েছে, আর m হল তার মধ্যে কতগুলো ভাগ ব্যবহৃত হয়েছে। এই ব্যাপারটা প্রাচীন কালের মানুষের কাছে বেশ যুক্তিপূর্ণ মনে হয়েছিল বলেই rational শব্দটার ব্যবহার। সে আমলে অবশ্য লোকে negative সংখ্যার ব্যবহার জানত না, চাষের জমি মাপতে তার প্রয়োজন হত না। কিন্তু আজকে আমরা m বা n যদি negative-ও হয়, তাও rational শব্দটা ব্যবহার করি। এই বিশ্বাসটা খুব বড় রকম ধাক্কা খায় গ্রীকদের আমলে, যখন পিথাগোরাসের theorem (উপপাদ্য) আবিষ্কার হয়। এর ফলে লোকে জানতে পারল যে, এমন সব গোলমেলে দৈর্ঘ্য সম্ভব যাদেরকে এই কায়দায় নির্ভুলভাবে মাপা যায় না, অর্থাৎ এক একক দৈর্ঘ্যকে যত সূক্ষ্ম ভাগেই ভাগ করো না কেন, সেই গোলমেলে দৈর্ঘ্যটা কোনো দাগের সঙ্গেই পুরো মিলবে না! ব্যাপারটা এইরকম-- যে কোনো একটা একক দৈর্ঘ্য নাও, ফুট, মিটার যা খুশি। এবার সেটার উপরে Fig 38-এর মত করে একটা right angled, isosceles triangle (সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ) আঁকো। আমি দাবী করছি যে, এই ত্রিভুজের hypotenuse-টার (মানে, অতিভুজটার) দৈর্ঘ্য তুমি কিছুতেই তোমার এককটা দিয়ে নির্ভুলভাবে মেপে ফেলতে পারবে না, তা সে তুমি তোমার একককে যতই সূক্ষ্ম সূক্ষ্ম ভাগে ভাগ করো না কেন। প্রমাণটা একটু জটিল--

ধরো আমার দাবী ভুল, তুমি সত্যিই hypotenuse-টাকে নির্ভুলভাবে মাপতে পারলে, তার জন্য এককটাকে q-টা সমান ভাগে ভাঙতে হল, আর তার মধ্যে p নম্বর দাগের সঙ্গে দৈর্ঘ্যটা মিলে গেল। যেমন Fig 39-তে $q = 10$ আর $p = 14$ দেখিয়েছি। তার মানে hypotenuse-টার দৈর্ঘ্য দাঁড়াচ্ছে $\frac{p}{q}$ একক। এদিকে Pythagoras' theorem থেকে তুমি জানো যে, hypotenuse-টার দৈর্ঘ্য হল $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ একক। সুতরাং নিশ্চয়ই

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

প্রথমেই p আর q-এর মধ্যে যদি কিছু কাটাকাটি করা যায় তো করে নাও। যেমন ছবিতে $q = 10$ আর $p = 14$ নিয়েছিলাম, কাটাকাটি করলে হয় $\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$. আর কাটাকাটি করা যাচ্ছে না, কারণ 5 আর 7-এর মধ্যে কোনো common factor (সাধারণ উৎপাদক) নেই। তেমনি $\frac{p}{q}$-কেও কাটাকাটি করে ধরো পেলাম $\frac{p_1}{q_1}$, যেখানে p_1 আর q_1-এর মধ্যে কোনো common factor নেই। তাহলে দাঁড়ালো

$$\sqrt{2} = \frac{p_1}{q_1}.$$

এবার দুপাশকে square করে দাও--

$$2 = \frac{p_1^2}{q_1^2}, \qquad (*)$$

মানে $p_1^2 = 2q_1^2$. সুতরাং p_1^2 অবশ্যই একটা even (জোড়) সংখ্যা। তার মানে p_1-ও একটা even সংখ্যা হতে বাধ্য (কারণ odd সংখ্যাদের square সর্বদা odd-ই হয়)। অতএব $p_1 = 2n$ জাতীয় কিছু একটা। এইটা যদি (*)-এ বসিয়ে দাও, তবে পাবে

$$2 = \frac{4n^2}{q_1^2},$$

মানে $q_1^2 = 2n^2$. সুতরাং q_1^2-ও একটা even সংখ্যা, তাই q_1-কেও even-ই হতে হবে।

অতএব পেলাম এই যে, p_1 আর q_1 দুজনেই even সংখ্যা, মানে 2 সংখ্যাটা ওদের দুজনেরই common factor. কিন্তু তা কী করে হয়, আমরা না এই একটু আগেই বললাম যে, ওদের কোনো common factor নেই! এই যে গণ্ডগোলটা বাঁধল (যাকে অংকের ভাষায় বলে **contradiction**), এ থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে, গোড়ায় ওই যে ধরে নিয়েছিলাম "আমার দাবীটা ভুল" সেটা ঠিক নয়, মানে আমার দাবীটা ঠিক।

আমরা তাহলে দেখলাম যে, $\sqrt{2}$ হল এমন একটা সংখ্যা, যেটা rational নয়। এরকম আরো অনেক সংখ্যা আছে যারা rational নয়! এদের নাম দেওয়া হয়েছে **irrational** (বাংলায় অমূলদ)।
সুতরাং জানা গেল যে, real number-রা দুই রকমের হয়, rational আর irrational. এবার যা বলব সেটা বোঝার জন্য real number-দের একটা লাইন বরাবর কল্পনা কর। এই লাইনের বিন্দুগুলোই হল একেকটা real number. ধরো এদের মধ্যে rational-দের আমরা লাল রং আর irrational-দের নীল রঙে রং করব। প্রশ্ন হল-- তবে পুরো লাইনটা দেখতে কীরকম হবে? এক দিক পুরো লাল, বাকিটা পুরো নীল? নাকি খানিকটা লাল খানিকটা নীল, তারপর খানিকটা ফের লাল, এইরকম? তুমি যদি একটা লাল বিন্দুতে থাকো, তবে কতটা গেলে পরের লাল বিন্দুটা পাবে?
এই প্রশ্নগুলোর উত্তর বেশ অদ্ভুত--লাল আর নীল একেবারে মিলেমিশে একাকার হয়ে থাকবে। তুমি যত ছোটো একটু interval-ই দ্যাখো না কেন, তার মধ্যে অসংখ্য rational পাবে, আবার অসংখ্য irrational-ও পাবে! এমনটা কেন হবে তার প্রমাণের মধ্যে যাব না, কিন্তু একটা ধারণা দিয়ে রাখি। এই rational-গুলো দ্যাখো, $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \ldots$ ইত্যাদি। এরা $\frac{1}{10}$ অন্তরে অন্তরে রয়েছে। যদি নীচতলায় 10-এর জায়গায় 100 নিতাম, তবে আরো ঘন ঘন হয়ে আসত, যদি 1000 নিতাম তবে আরো ঘন হত। সুতরাং বুঝতেই পারছ যে, rational-রা পুরো real line জুড়েই ঘন হয়ে ছড়িয়ে আছে। আর ওদের ফাঁকে ফাঁকে ঢুকে আছে অসংখ্য irrational সংখ্যা, তাই ওরাও পুরো real line জুড়ে ঘন হয়ে আছে।
এখানে দুটো notation-এর কথা বলে নিই। যাবতীয় rational সংখ্যাদের set-কে লেখা হয় $\mathbb{Q}$. যেসব real সংখ্যা rational নয়, তারা সবাই irrational, তাই irrational-দের set-কে লেখা যায় $\mathbb{Q}^c$.

28.2 লাফালাফি করা function

এবার যেটা আলোচনা করব, সেটা একটু কঠিন, এবং ক্যালকুলাস শেখার জন্য খুব যে দরকারী এমন নয়। সুতরাং পরীক্ষার চাপ না থাকলে (এবং মজা না লাগলে) বাদ দিয়ে যেতে পারো।
একধরণের অদ্ভুত function বানানো যায় এইভাবে-- rational-এ 1 আর irrational-এ 2. মানে

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

এই function-টা বেজায় লাফালাফি করে, এই 1-এ আছে, পরমুহূর্তে 2-তে উঠে গেল, তারপরেই আবার ঝপ্ করে 1-এ ফিরে এল। এরকম বেয়াড়া function-এর গ্রাফ আঁকা অসম্ভব। মোটামুটি একটা আভাস দেওয়ার চেষ্টা করেছি Fig 40-এ। গ্রাফটা দুটো horizontal লাইন দিয়ে তৈরী, একটা 1 দিয়ে, অন্যটা 2 দিয়ে। দুটো লাইনের কোনোটাই একটানা নয়, গুঁড়োগুঁড়ো বিন্দু দিয়ে তৈরী। 1 দিয়ে যে লাইনটা, সেটাতে খালি rational বিন্দুগুলো আছে, আর অন্য লাইনটাতে খালি irrational বিন্দুগুলো। আন্দাজ করতে পারছ নিশ্চয়ই যে, এরকম function-এর পক্ষে continuous হওয়া অসম্ভব। উদাহরণস্বরূপ, x-এর যা খুশি একটা value নাও, ধরো 3. এবার বাঁদিক থেকে 3-র দিকে এগোতে থাকো। যদি এগোবার সময়ে খালি rational-দের উপর পা রেখে রেখে এগোও, যেমন $3-1, 3-\frac{1}{2}, 3-\frac{1}{3}, 3-\frac{1}{4}, \ldots$ এইভাবে, তবে $f(x)$-টা সর্বদাই 1

Fig 40

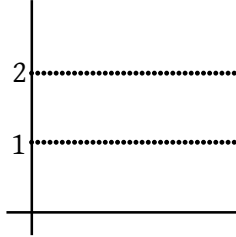
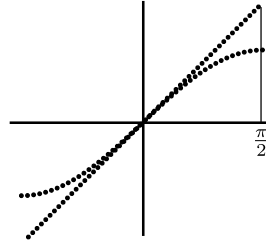



Fig 41

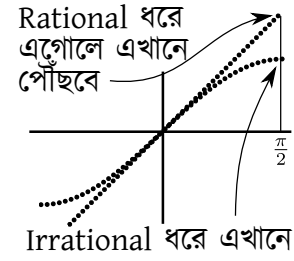



Fig 42

হবে। কিন্তু যদি irrational-দের উপর পা রেখে এগোতে, যেমন $3-\sqrt{2}, 3-\frac{\sqrt{2}}{2}, 3-\frac{\sqrt{2}}{3}, 3-\frac{\sqrt{2}}{4}, \ldots$ এইভাবে, তবে $f(x)$ সবসময়েই হয়ে থাকবে 2. তাই $\lim_{x\to 3-} f(x)$-টা undefined হয়ে যাবে। এই ব্যাপারটা ছবি দিয়ে ভালো করে বুঝে নাও।
এইটা নিয়ে আরেকটু কায়দা করা যায়। যে কোনো দুটো পরিচিত function নাও, ধরো x আর $\sin x$. এদেরকে এভাবে মেশাও--

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ \sin x & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

গ্রাফের আভাসটা দেখিয়েছি Fig 41-এ। এটা কি $x=\frac{\pi}{2}$-তে continuous? Fig 42 দেখলেই বুঝবে যে, উত্তর হল--না। কিন্তু $x=0$-তে কি continuous? এবার উত্তর হল--হ্যাঁ, কারণ ওখানে $x=\sin x$. তাই rational বা irrational যার উপরে পা রেখেই এগোও, একই জায়গায় পৌঁছবে।
একই যুক্তিতে, $r(x)$ আর $i(x)$ যদি যে কোনো দুটো continuous function হয়, তাহলে

$$f(x)=\begin{cases} r(x) & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ i(x) & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

ঠিক সেই সব জায়গাতেই continuous হবে যেখানে $r(x)=i(x)$ হবে। এই কথাটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা করো।

Example 52: Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined as

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ irrational} \\ \sin|x| & \text{if } x \text{ rational}\end{cases}$$

Then which of the following is true?

(A) f is discontinuous for all x

(B) f is continuous for all x

(C) f is discontinuous at $x=k\pi$, where k is an integer

(D) f is continuous at $x=k\pi$, where k is an integer

(JEE2015.17)
SOLUTION: এখানে চিন্তা করার জন্য $\sin|x|$-এর গ্রাফটা কল্পনা করলে সুবিধা হবে। প্রথমে $\sin x$-এর গ্রাফটা নাও (Fig 43), y-axis-এর বাঁদিকের অংশটা মুছে ফ্যালো (Fig 44)। এবার y-axis বরাবর ডানদিকের অংশটার প্রতিফলনটা বাঁদিকে আঁকো (Fig 45)। দ্যাখো এটা কখন 0 হচ্ছে, মানে x-axis-এর গায় লাগছে। উত্তর হল $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ ইত্যাদি জায়গায়। কেবলমাত্র সেই সব জায়গাতেই f-টা continuous হবে। তাই উত্তর হবে (D). ■

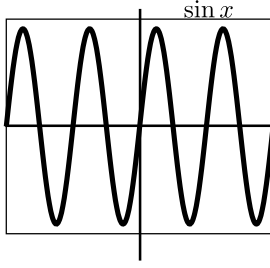



Fig 43

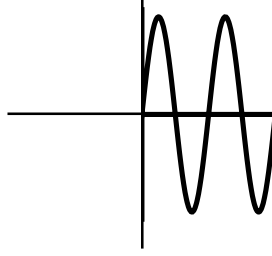



Fig 44

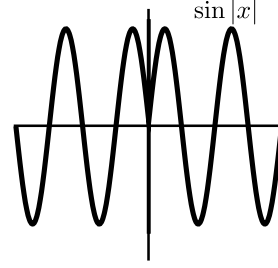



Fig 45

Exercise 15: এই function-টা কোথায় কোথায় continuous?

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \text{ irrational} \\ x^2 & \text{if } x \text{ rational} \end{cases}$$

■

এইবার একটা অন্যরকম অংক যেটা বেশ কঠিন।

Example 53: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be such that $f(2x-1) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. If f is continuous at $x = 1$ and $f(1) = 1$, then

(A) $f(2) = 1$

(B) $f(2) = 2$

(C) f is continuous only at $x = 1$

(D) f is continuous at all points.

(JEE2015.78)

SOLUTION: অংকটা দেখে ঠিক বোঝা যাচ্ছে না কী করে আক্রমণ করা উচিত। এরকম ক্ষেত্রে কিছু উদাহরণ নিয়ে ভাবলে মাথা খোলে। এখানে উদাহরণ বলতে বোঝাচ্ছি x-এর কিছু value নিয়ে সেখানে $f(x)$ বার করার চেষ্টা করা। প্রথম দুটো option হল $f(2)$ নিয়ে, তাই $f(2)$ বার করার চেষ্টা করা যাক। বলা আছে $f(1) = 1$ আর একটা সম্পর্ক $f(2x-1) = f(x)$. এই সম্পর্কটাকে কাজে লাগিয়ে $x = 2$ থেকে $x = 1$-এ পৌঁছনো যায় কি না দেখি। যদি সম্পর্কটার মধ্যে $x = 1$ বসিয়ে দাও, তবে পাবে $f(1) = f(1)$. ধ্যুৎ, তাতে লাভ কী হল! যদি $x = 2$ বসাই, তবে পাবে $f(3) = f(2)$. কিছু একটা নতুন জিনিস পাওয়া গেল, যদিও $x = 1$-এর দিকে এগোনো গেল না, বরং উল্টো দিকে চলে গেলাম। আচ্ছা, যদি সম্পর্কটাকে উল্টে নিই, মানে $2x - 1 = y$ ধরি, তবে $x = \frac{y+1}{2}$ হবে, সুতরাং সম্পর্কটা হবে $f(y) = f\left(\frac{y+1}{2}\right)$. এখানে যদি $y = 2$ বসাই, তবে $f(2) = f(1.5)$ আসছে। হ্যাঁ, এটা বেশ আশাজনক, কারণ 1-এর দিকে এগোনো গেছে। এবার $y = 1.5$ বসাও, পাবে $f(1.5) = f(1.25)$. এবার $y = 1.25$ বসালে 1-এর আরো কাছে যাবে। এইভাবে তুমি একটা sequence পাবে $y_1 = 2,\ y_2 = 1.5,\ y_3 = 1.25, \ldots$ যেটা ক্রমশঃই 1-এর দিকে এগিয়ে যাচ্ছে। যেহেতু বলে দিয়েছে $x = 1$-এ $f(x)$ হল continuous, তাই $f(y_n) \to f(1) = 1$ হবে। এদিকে $f(y_1) = f(y_2) = f(y_3) = \cdots$. তার মানে $f(y_n)$-রা সকলেই 1. অতএব $f(2) = 1$. তাই (A) একটা সঠিক উত্তর, এবং (B) ভুল। ঠিক একই কায়দায় যে কোনো $x = a$ থেকেই এমন একটা sequence পাবে, যেটা $x = 1$-এর দিকে এগিয়ে যায়, সুতরাং x-এর যে কোনো value-তেই আসলে $f(x) = 1$ হতে বাধ্য। সুতরাং (D)-ও সঠিক উত্তর, এবং (C) নয়।

এই অংকটা কি খুব কঠিন লাগল? পরীক্ষার সময়ে মাথা ঠাণ্ডা রেখে করতে পারবে? যদি পারো তো আমার সশ্রদ্ধ সেলাম গ্রহণ কোরো। অংকটা করতে আমার মাত্র দু দিন সময় লেগেছিল! ■

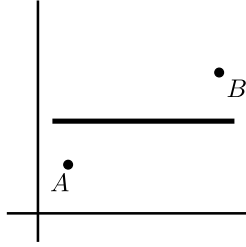
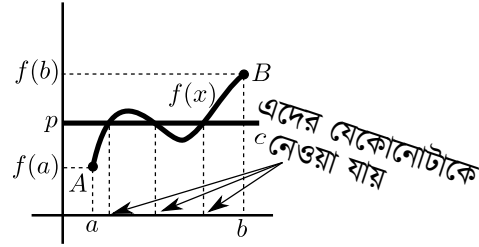



Fig 46 **Fig 47**

28.3 Intermediate value property

এবার continuous function-দের এমন একটা ধর্মের কথা শিখব, যেটা অতি সহজ বুদ্ধিতেই বোঝা যায়। Fig 46-এ একটা function-এর গ্রাফ আঁকতে হবে। তিনটে শর্ত মেনে করতে হবে--

1. শুরু করতে হবে A-তে, শেষ হবে B-তে।
2. পেন তোলা চলবে না।
3. মাঝের মোটা লাইনটাকে ছেদ করা চলবে না।

খানিকটা চেষ্টা করলেই বুঝবে যে, কাজটা অসম্ভব। অর্থাৎ প্রথম দুটো শর্তপালন করতে হলে মোটা লাইনটাকে ছেদ না করে পথ নেই। মোটা লাইনটা যেন A আর B-এর মধ্যে একটা দেওয়াল, দেওয়াল না টপকে এদিক থেকে ওদিকে যাবার জো নেই। বস্তুতঃ এমন যদি না হত, তবে বাড়ির চারপাশে দেওয়াল তুলে আমরা বাড়ি সুরক্ষিত করতে পারতাম না।
এইটাই ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখলেই পাওয়া যায় **intermediate value theorem--**

intermediate Value Theorem

> Let $f(x)$ be a function that is continuous on $[a, b]$. Let p be any number between $f(a)$ and $f(b)$. Then there must exist some number $c \in [a, b]$ such that $f(c) = p$.

এই theorem-টার সঙ্গে আগের ছবিটার মিল বুঝবে Fig 47 দেখলেই।

Example 54: Let $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $f(x)$ assumes only irrational values. If $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, then

(A) $f(0) = 0$ (B) $f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$ (C) $f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1$ (D) $f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$.

(JEE2015.33)

SOLUTION: ছবি দিয়ে ভাবলে এই অংকটা ধাঁ করে হয়ে যাবে। তোমার কাছে $f(x)$-এর বিষয়ে খালি তিনটে তথ্য আছে, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ আর $f(x)$ হল continuous, আর $f(x)$-টা কখনোই rational হতে পারে না। প্রথম দুটো তথ্য বলছে যে, গ্রাফটা পেন না তুলে আঁকা যাবে, এবং $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ বিন্দুটা দিয়ে যাবে। প্রথমেই চেষ্টা করো এরকম কোনো $f(x)$-এর উদাহরণ ভাবতে পারো কিনা। এরকম সহজতম উদাহরণ হল constant function, যেটা সর্বদাই $\sqrt{2}$ হয়ে বসে আছে, মানে গ্রাফটা একটা horizontal লাইন। এই উদাহরণটা যদি মাথায় এসে যায়, তবে তৎক্ষণাৎ (A), (B) আর (C) বাদ হয়ে যাবে। এই উদাহরণটার জন্য (D) সঠিক হচ্ছে বটে, কিন্তু অন্য কোনো উদাহরণের ক্ষেত্রে যে সেটা ভুল হয়ে যাবে না, এমন কোনো গ্যারান্টি এখনই চোখে পড়ছে না। সেই গ্যারান্টিটাই আসবে intermediate value theorem থেকে। ধরো $f(\sqrt{2}-1) \neq \sqrt{2}$. তাহলে intermediate value theorem বলছে যে, আমাদের $f(x)$-টা $\sqrt{2}$ থেকে $f(\sqrt{2}-1)$-এর মধ্যেকার যাবতীয় value-ই নিতে বাধ্য। এদিকে আমরা জানি যে, rational-রা পুরো real line-এর সর্বত্রই ঘন হয়ে ছড়িয়ে

আছে, সুতরাং $\sqrt{2}$ আর $f(\sqrt{2}-1)$-এর মধ্যেও অসংখ্য rational সংখ্যা আছে, সেই value-গুলোও তাহলে $f(x)$-কে নিতে হয়! কিন্তু সেটা তো অসম্ভব, কারণ $f(x)$ তো বলে দিয়েছে যে rational কোনো value নিতে পারে না! অতএব $f(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}$ না হয়ে যায় না! তাই (D)-ই হল একমাত্র সঠিক উত্তর। ■

Example 55: Suppose that all the roots of the polynomial $P(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0$ are real and smaller than 1. Then, for any such polynomial, the function

$$f(x) = a_{10}\frac{e^{10x}}{10} + a_9\frac{e^{9x}}{9} + \cdots + a_1e^x + a_0x, \quad x > 0$$

(A) is increasing

(B) is either decreasing or increasing

(C) is decreasing

(D) is neither decreasing or increasing.

(Bstat/Bmath2013short.28)

SOLUTION: এখানে $f'(x) = a_{10}e^{10x} + a_9e^{9x} + \cdots + a_1e^x + a_0$.
আমাদের মাথা ঘামাতে হবে $f'(x) > 0$ নাকি < 0, সেটা নিয়ে।
লক্ষ করো $f'(x)$-কে $P(e^x)$ লেখা যায়। যখন $x > 0$ তখন $e^x > 1$. সুতরাং যদি $y = e^x$ লিখি, তবে আমাদের গবেষণার বিষয় হল $P(y) > 0$ নাকি < 0 যখন $y > 1$. যেহেতু বলে দিয়েছে যে $P(x)$-এর সব root-ই হল < 1, সুতরাং $y > 1$-এর জন্য $P(y) = 0$ হতে পারে না। অতএব চারটে সম্ভাবনা আছে--

- এক, সব $y > 1$-এর জন্যই $P(y) > 0$ (এক্ষেত্রে (A) আর (B) হবে ঠিক উত্তর)
- দুই, সব $y > 1$-এর জন্যই $P(y) < 0$ (এক্ষেত্রে (C) আর (B) হবে ঠিক উত্তর)
- তিন, হয় সব $y > 1$-এর জন্যই হয় $P(y) > 0$, নয়তো সব $y > 1$-এর জন্যই $P(y) < 0$. (এক্ষেত্রে (B) হবে ঠিক উত্তর)
- চার, কোনো $y > 1$-এর জন্য $P(y) > 0$ আবার কোনো $y > 1$-এর জন্য $P(y) < 0$. (এক্ষেত্রে (D) হবে ঠিক উত্তর)

এদিকে $P(y)$ হল একটা polynomial, সুতরাং continuous. সুতরাং চতুর্থ সম্ভাবনাটা যদি ঠিক হয়, তবে intermediate value theorem থেকে পাব যে, কোনো $y > 1$-এর জন্য $P(y) = 0$, যেটা জানি অসম্ভব। তাই চতুর্থ সম্ভাবনাটা বাদ গেল। $P(y)$ একটা polynomial, তার ডান হাত হয় উপরে ওঠানো, নয়তো নীচে নামানো, কোনটা হবে তার কোনো স্থিরতা নেই, কারণ সবচেয়ে বড় power-এর coefficient-র চিহ্নটা আমাদের বলে দেয় নি। তাই প্রথম আর দ্বিতীয় সম্ভাবনাও বাদ গিয়ে পড়ে রইল খালি তৃতীয় সম্ভাবনাটা। তাই সঠিক উত্তর হল (B). ■

DAY 29
Rolle, Lagrange

এবার আমরা দুটো theorem শিখব, যেগুলো ছবি দিয়ে বুঝতে বেশ সহজ। এরা হল Rolle's theorem আর Lagrange's mean value theorem. অনেক সময়ে লোকে Lagrange's mean value theorem-কে সংক্ষেপে খালি mean value theorem বা MVT-ও বলে থাকে।

29.1 Rolle's theorem

প্রথমে ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝব। গ্রাফ কাগজে একটা horizontal লাইন টানো, মানে x-axis-এর সঙ্গে parallel করে। তার উপরে যা খুশি দুটো বিন্দু নাও (Fig 48)। এবার তোমার কাজ হল এমন একটা function-এর গ্রাফ আঁকা, যেটা ওই বিন্দু দুটো দিয়ে যায়, এবং যেন সর্বত্র differentiable হয়, অর্থাৎ কোথাও কোনো ভাঙা বা খোঁচ না থাকে[5]। চেষ্টা করেই দ্যাখো! দেখবে যে, কাজটা নানাভাবে করা যাচ্ছে (Fig 49)। কিন্তু যেভাবেই করো না কেন কোথাও না কোথাও পেনটাকে মোড় ঘুরতে হচ্ছে, এবং সেখানে tangent-টা horizontal হতে বাধ্য (Fig 50)। যদি ভাঙা বা খোঁচ থাকত, তবে কিন্তু এ কথাটা জোর দিয়ে বলা যেত না (Fig 51 আর Fig 52)। চাইলে তুমি পুরো গ্রাফটাকেই horizontal রাখতে পারো, তবে কোথাও মোড় ঘুরতে হল না বটে, কিন্তু tangent-এর horizontal হওয়া আটকানো গেল না, কারণ এক্ষেত্রে tangent-টা সর্বত্রই horizontal. মনে রেখো Fig 53-র মত ঘুরপথে আসা কিন্তু চলবে না, কারণ তাহলে ওটা কোনো function-এর গ্রাফই হবে না!

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে--

> কোনো বিন্দু থেকে যদি ওই একই উচ্চতায় কোনো বিন্দুতে ফিরে আসতে হয়, এবং কোথাও কোনো ভাঙা বা খোঁচ না থাকে, তবে মাঝখানে কোথাও অন্ততঃ একবার tangent-টার পক্ষে horizontal না হয়ে পথ নেই।

এইটাই হল Rolle's theorem.

Rolle's theorem

Let $a < b$ be any two numbers. Let $f(x)$ be a function such that

1. it is continuous on $[a, b]$,
2. it is differentiable on (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Then there must exist some $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = 0$.

[5] এবং tangent-টা কোথাও vertical হয়ে না যায়। তবে সেটা হয়ে গেলেও Rolle's theorem-এ কিছু অসুবিধা নেই।

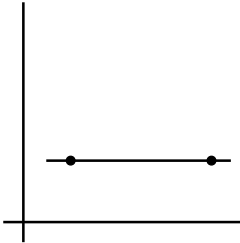
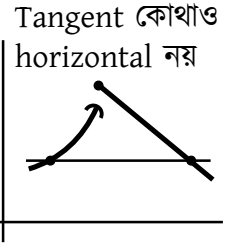
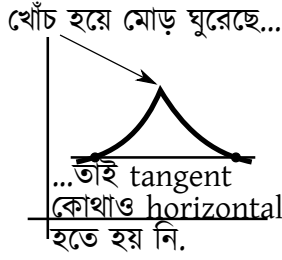
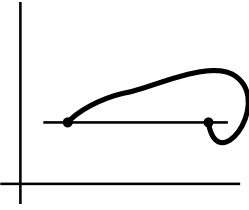
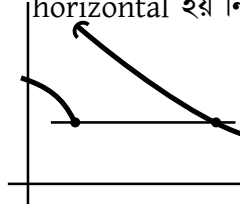
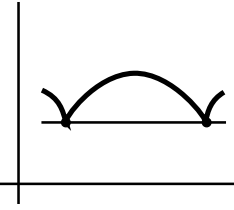



Fig 52 **Fig 53** **Fig 54** **Fig 55**

Theorem-টা পড়তে গিয়ে অনেকেরই মাথা গুলিয়ে যায়। আসলে theorem-টাকে ছবি দিয়ে মনে রাখাই ভালো। কিন্তু theorem-এর যে জায়গাটা ছবি দিয়ে বুঝতে একটু কষ্ট হতে পারে সেটা হল

ছাগল বলল, "শক্ত আবার কোথায়? ঐ শিশি বোতলের জায়গাটা একটু শক্ত ঠেকল, তাছাড়া তো শক্ত আর কিচ্ছু পেলাম না।"
--হ য ব র ল

ওই "continuous on $[a, b]$" আর "differentiable on (a, b)" অংশটা। Continuous-এর বেলায় $[a, b]$, অথচ differentiable-এর বেলায় (a, b) কেন? সেটা প্রথমে বুঝে নিই। আমরা কাজ করছি $[a, b]$-র উপরে। এর দুইপ্রান্তে কেন $f(x)$-এর continuous হওয়া দরকার সেটা Fig 54 দেখলেই বুঝবে। কিন্তু যদি Fig 55-এর মত হত, তাতে Rolle's theorem-এ কিছু অসুবিধা হত না, তাই প্রান্ত দুটোতে খোঁচ থাকলেও আপত্তি নেই। আরেকটা ব্যাপারেও তোমার দৃষ্টি আকর্ষণ করে রাখি--theorem-টার শেষে আমরা কিন্তু $c \in (a, b)$ পেয়েছি, যাতে $f'(c) = 0$ হয়। সেখানে কিন্তু $[a, b]$ বলি নি, কারণ $c = a$ বা $c = b$ হয়ে গেলে $f'(c)$-টা defined নাও হতে পারে।

Example 56: Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = 4^{\sin x}$ in the interval $[0, \pi]$.[2] **(HS2015)**

SOLUTION: যে কোনো theorem-এর মূল চেহারা একই--যদি অমুক অমুক শর্ত পালিত হয়, তবে তমুক তমুক সিদ্ধান্ত করা যাবে। যখন কোনো theorem-কে একটা উদাহরণ দিয়ে "verify" করতে বলা হয়, তার মানে হল প্রথমে পরীক্ষা করে দেখানো theorem-এর শর্তগুলো সেই উদাহরণে পালিত হচ্ছে কিনা, এবং যদি হয়, তবে এটাও আলাদা করে দেখানো যে, theorem-এর সিদ্ধান্তগুলোও সেই উদাহরণে সঠিক।

এই অংকে আমাদেরকে একটা $f(x)$ দিয়ে দিয়েছে, এবং $a = 0$ আর $b = \pi$ নিয়ে কাজ করতে বলেছে। প্রথমে দেখাতে হবে continuous on $[0, \pi]$ আর differentiable on $(0, \pi)$. এই দুটোই এক সঙ্গে দেখানো যাবে কারণ আমাদের $f(x)$-টা আসলে সর্বত্রই differentiable.

✎ $\because \sin x$ and 2^x are differentiable, and composition of differentiable functions is differentiable,

$\therefore f(x) = 2^{\sin x}$ is differentiable on $\mathbb{R}$.

Hence $f(x)$ is continuous on $[0, \pi]$ and differentiable on $(0, \pi)$.

এবার দেখাতে হবে $f(0) = f(\pi)$.

✎ $f(0) = \cdots = 4^0 = 1.$

$f(\pi) = \cdots = 4^0 = 1.$

Thus $f(0) = f(\pi)$.

ব্যস্, সব শর্ত পালিত হয়েছে।

✎ So Rolle's theorem is applicable to $f(x)$ on $[0, \pi]$, and implies that there must be some $c \in (0, \pi)$ such that $f'(c) = 0$.

এবার এরকম একটা c বার করে দেখাতে হবে।

✎Now

$$f'(x) = \log 4 \times 4^{\sin x} \cos x.$$

এর মধ্যে $\cos x$-টা 0 হবে $c = \frac{\pi}{2}$ নিলেই, এবং $\frac{\pi}{2}$ দিব্যি $(0, \pi)$-এর মধ্যেও আছে--

✎Indeed, taking $c = \frac{\pi}{2}$, we see that $f'(c) = \log 4 \times 4^1 \times 0 = 0$.

■

Example 57: Rolle's theorem is applicable in the interval $[-2, 2]$ for the function

(A) $f(x) = x^3$ (B) $f(x) = 4x^4$ (C) $f(x) = 2x^3 + 3$ (D) $f(x) = \pi|x|$

(JEE2012.22)
SOLUTION: শর্তগুলো একে একে পরীক্ষা করে দেখতে হবে।
(A) আর (C)-এর বেলায় $f(2) \neq f(-2)$, তাই হবে না।
(B)-এর বেলায় কোনো অসুবিধা নেই।
(D)-এর বেলায় $x = 0$-তে differentiable হচ্ছে না।
অতএব উত্তর হবে (B). ■

Exercise 16: For the function $f(x) = e^{\cos x}$, Rolle's theorem is

(A) applicable when $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

(B) applicable when $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(C) applicable when $0 \leq x \leq \pi$

(D) applicable when $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(JEE2011.48)
HINT:
এখানে $f(x)$-টা সব সময়েই একই আছে, কিন্তু প্রতিটা option-এ একটা করে a আর b দিয়েছে। লক্ষ করো, $f(x)$-টা পুরো $\mathbb{R}$-এর উপরেই differentiable. এবার বাকিটুকু নিজে কর।
■

এবার একটা সামান্য কঠিন অংক, যেখানে Rolle's theorem-এর কোনো উল্লেখ নেই, কিন্তু তোমাকে বুঝতে হবে যে, Rolle's theorem লাগাতে হবে।

Example 58: Let f be any continuously differentiable function on $[a, b]$ and twice differentiable on (a, b) such that $f(a) = f'(a) = 0$ and $f(b) = 0$. Then

(A) $f''(a) = 0$

(B) $f'(x) = 0$ for some $x \in (a, b)$

(C) $f''(x) = 0$ for some $x \in (a, b)$

(D) $f'''(x) = 0$ for some $x \in (a, b)$

(JEE2015.75)

SOLUTION: এখানে একটা নতুন ভাষা ব্যবহার করা হয়েছে, continuously differentiable. এর মানে হল $f(x)$-টা differentiable, এবং $f'(x)$ একটা continuous function.

এখানে শর্তগুলো দেখেই Rolle's theorem-এর গন্ধ পাওয়া উচিত। এখানে $f(x)$-টা Rolle's theorem-এর শর্ত পালন করে তাই (B) ঠিক হতে বাধ্য। সুতরাং এমন কোনো $c \in (a, b)$ পাচ্ছি, যাতে $f'(c) = 0$ হয়।

লক্ষ করো যে, Rolle's theorem-এ যা যা শর্ত লাগে, তার থেকে বেশী কিছু শর্ত এখানে দিয়েছে। যেমন "twice differentiable on (a, b)" এবং "continuously differentiable on $[a, b]$"। এদের মানে হল $f'(x)$-টা $[a, b]$-র উপরে continuous, এবং (a, b)-র উপর differentiable. অর্থাৎ $f'(x)$-টার উপরেও Rolle's theorem-এর শর্তগুলো খাটছে, খালি একটা জিনিস ছাড়া! কোথাও বলে নি যে, $f'(a) = f'(b)$. কিন্তু বলা আছে $f'(a) = 0$ আর আমরা পেয়েছি $f'(c) = 0$. তাই $[a, c]$-র উপরে $f'(x)$-টা Rolle's theorem-এর শর্তগুলো পালন করে। অতএব (C)-ও ঠিক হবে।

এবার দেখি বাকি option-গুলো ঠিক নাকি ভুল। (D)-র ঠিক হবার কোনো কারণই নেই, কারণ $f(x)$-কে যে তিন বার differentiate করা যাবে, তারই কোনো গ্যারান্টি নেই। আর $f''(a) = 0$ হওয়ারও কোনো কারণ নেই, যেমন $f(x) = x^2(1 - x)$ আর $a = 0, b = 1$ নিলে। ■

29.2 Lagrange's mean value theorem

এবার আমরা আরেকটা theorem শিখব, যাকে Rolle's theorem-এর বড় ভাই বলা যেতে পারে। ছবি দিয়ে ভাবলে ধারণাটা একইরকম--এখানেও গ্রাফ কাগজে একটা সরলরেখা এঁকে শুরু করব (Fig 56)। এখানে অবশ্য সরলরেখাটার horizontal হবার কোনো দরকার নেই, হেলানো হলেও চলবে (খালি যেন vertical হয়ে না যায়)। বাকি অংশ Rolle's theorem-এর মতই, যে কোনো দুটো বিন্দু নাও সরলরেখাটার উপরে, তাদেরকে কোনো একটা function-এর গ্রাফ এঁকে যোগ করো, function-টা যেন differentiable হয়। তাহলে দেখবে যে, পেনটাকে কোথাও মোড় ঘুরতে হচ্ছে, এবং সেখানে tangent-টাকে সরলরেখাটার সঙ্গে parallel হতে হবে[6] (Fig 57)। এটাই হল Lagrange's mean value theorem. আশা করি বুঝতে পারছ যে, শুরুতেই সরলরেখাটা horizontal নিলে এটা Rolle's theorem-এ পরিণত হত।

অংকের ভাষায় লিখলে mean value theorem-টা এরকম দাঁড়ায়---

[6]অবশ্য যদি পেনটাকে সরলরেখাটা বরাবর চালাও, তবে কোনো মোড় ঘুরতে হয় না, কিন্তু সেক্ষেত্রে tangent-টা সর্বত্রই সরলরেখাটার সঙ্গে parallel হয়।

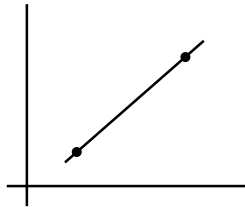



Fig 56 **Fig 57**

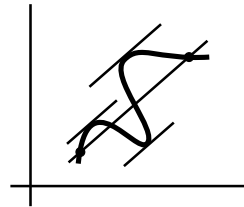
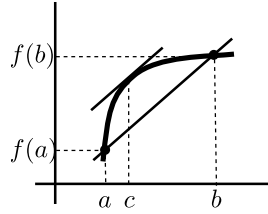



Fig 58

Lagrange's mean value theorem

Let $a < b$ be any two numbers. Let $f(x)$ be a function that is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b). Then there must exist some $c \in (a, b)$ such that

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Theorem-টা পড়তে গিয়ে মাথা গুলিয়ে যাওয়া বিচিত্র নয়। বোঝার জন্য Fig 58 দেখে নাও। এখানে $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ হল সরলরেখাটার slope. তাই $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ মানে হল $x = c$-এ $f(x)$-এর tangent-টা সরলরেখাটার সঙ্গে parallel. একটা অংক করে সড়গড় হয়ে নেওয়া যাক।

Example 59: Verify Lagrange's mean value theorem for the function $f(x) = 4(6 - x)^{2/3}$ in $5 \leq x \leq 7$.[2] **(HS2016.civ)**

SOLUTION: আমাদের বলেছে $5 \leq x \leq 7$ নিয়ে কাজ করতে, তাই--

✎Let $a = 5$ and $b = 7$.

এখানে $[a, b]$-র উপরে $f(x)$-টা continuous, সেখানে কোনো সমস্যা নেই। চট্‌ করে differentiate করে দেখি, $f'(x) = -4 \times \frac{2}{3} \times (6 - x)^{-1/3} = -\frac{8}{3(6-x)^{1/3}}$. এই ফর্মুলাটা অবশ্যই $x = 6$-এ কাজ করবে না, কারণ নীচের তলায় 0 এসে যাবে। সুতরাং $x = 6$-এ $f(x)$-এর differentiability নিয়ে সমস্যা আছে। অবশ্য সেটা প্রমাণ করে দিতে হবে--

✎Here $f(x)$ is not differentiable at $x = 6$.

⟦ <u>Because:</u>

$\frac{f(x)-f(6)}{x-6} = \frac{4(6-x)^{2/3}-0}{x-6} = -4(6 - x)^{-1/3}$.

Now $\lim_{x\to 6} 4(6 - x)^{-1/3}$ does not exist as $x \to 6$.

⟧

So Lagrange's mean value theorem is not applicable here.

■

Exercise 17: Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers and $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Then

(A) f satisfies the conditions of Rolle's theorem on $[-1, 1]$.

(B) f satisfies the conditions of Lagrange's mean value theorem on $[-1, 1]$.

(C) f satisfies the conditions of Rolle's theorem on $[0, 1]$.

(D) f satisfies the conditions of Lagrange's mean value theorem on $[0, 1]$.

(JEE2014.51)
HINT: এই অংকটা তুমি নিজেই করতে পারবে, খালি একটু ধরিয়ে দিই--

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

এটা sandwich law দিয়েই দেখানো যায়। কিন্তু

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \text{ হল } \quad \text{undefined.}$$

এটা বোঝা যায় এইভাবে--প্রথমে $\frac{1}{x}$-কে একটা নাম দিয়ে নাও, ধরো u. তাহলে যতই x-টা 0-র দিকে এগোচ্ছে ডানদিক থেকে, ততই u যাচ্ছে ∞-র দিকে। এবার $\sin u$-এর গ্রাফটা ভাবো, যতই u বাড়ছে, ততই $\sin u$ ক্রমাগত ঢেউয়ের মত ওঠানামা করেই চলেছে, করেই চলেছে, কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যার দিকে এগোচ্ছে না মোটেই।
■

এবার একটা অংক দেখব, যার ভাষাটা বড়ই গোলমেলে।

Example 60: Applying Lagrange's mean value theorem for the suitable function $f(x)$ in $[0, h]$ we have

$$f(h) = f(0) + hf'(h\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Then for $f(x) = \cos x$, the value of $\lim_{h\to 0+}\theta$ is

(A) 1 (B) 0 (C) 1/2 (D) 1/3.

(JEE2014.61)
SOLUTION: এই অংকের ভাষাটা এতই বাজেভাবে দেওয়া যে, বোঝাই যাচ্ছে না কী করতে হবে। প্রথমে সেটা বুঝে নিই। আমরা $f(x) = \cos x$ আর কোনো একটা $h > 0$ নিয়ে শুরু করছি। লক্ষ করো যে, $f(x)$-টা পুরো $\mathbb{R}$-এর উপরেই differentiable, তাই $[0, h]$-এর উপরে অবশ্যই mean value theorem লাগানো যেতে পারে। তাহলে এমন একটা $c \in (0, h)$ পাব যাতে $f'(c) = \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$ হয়, মানে $f(h) = f(0) + hf'(c)$ হয়। এবার যদি এই $\frac{c}{h}$-কে θ নাম দিই, তবে অবশ্যই $0 < \theta < 1$ হবে। সুতরাং দাঁড়াচ্ছে $f(h) = f(0) + hf'(h\theta)$. যেহেতু $f(x) = \cos x$, তাই--

$$\cos(h) = 1 - h\sin(h\theta). \qquad (*)$$

এখানে মনে রাখা দরকার যে, c-টা যে, খালি একভাবেই নেওয়া যাবে, এমন কিন্তু নয়। সুতরাং θ-রও একাধিক value সম্ভব। সুতরাং (*)-কে আমরা কিন্তু θ-র সংজ্ঞা হিসেবে নিতে পারি না। সেই যেমন কে একজন তার বিদেশী বন্ধুকে বলেছিল, 'কলকাতায় গেলেই ভাই আমার বাড়ি যাস, আমার বাড়ি চেনা খুব সোজা, বাড়ির সামনেই একটা পানের দোকান আছে!" এইটুকুমাত্র বর্ণনা থেকেই কলকাতায় কারো বাড়ি নির্ভুলভাবে সনাক্ত করা অসম্ভব, কারণ কলকাতা শহরে এমন বহু বাড়ি আছে যাদের সামনে পানের দোকান। তেমনি কোনো একটা $h > 0$ দেওয়া থাকলে এমন বহু θ সম্ভব যাতে (*) শর্তটা পালিত

হয়। সুতরাং এটুকু থেকেই আমরা θ-কে h-এর function হিসেবে পাচ্ছি না, অতএব limit নেওয়ারও প্রশ্ন নেই। সেই দিক দিয়ে দেখলে অংকটা শুধু গোলমেলেই নয়, ভুলও বটে। কিন্তু ভুলটা মেরামত করে নেওয়া যায় সহজেই। এখানে আসলে বলতে চেয়েছে এরকম যাই θ নাও না কেন, সবক্ষেত্রেই limit-টা একই হবে। এবার তবে অংকটা কষা শুরু করি।
আমাদের হাতে আছে খালি এই তথ্যটা--

$$\sin(h\theta) = \frac{1-\cos h}{h}.$$

এখান থেকে আমাদের কাজ হল $\lim_{h\to 0+}\theta$-তে পৌঁছনো। আমরা এগোব এইভাবে--

$$\theta = \frac{h\theta}{h} = \frac{h\theta}{\sin(h\theta)} \times \frac{\sin(h\theta)}{h} = \frac{h\theta}{\sin(h\theta)} \times \frac{1-\cos h}{h^2}.$$

আমরা জানি যে, $h \to 0+$ হলে $h\theta \to 0$ হবে (কারণ $0 < \theta < 1$ হওয়ায় $0 < h\theta < h$ হবে, তাই sandwich law লাগানো যাবে), সুতরাং $\frac{h\theta}{\sin(h\theta)} \to 1$.
আবার

$$\frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1-\cos^2 h}{h^2(1+\cos h)} = \frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)} \to \frac{1}{2}.$$

সুতরাং উত্তর হল (C). ■

29.2.1 কত বেশী বাড়তে পারে?

আমরা শিখেছি যে, $f'(x)$ হল $f(x)$-এর বৃদ্ধির হার। তাই $f'(x)$ যত বাড়বে, $f(x)$-ও ততই তাড়াতাড়ি বাড়বে। ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বোঝা সহজ--গ্রাফটা যতই খাড়াভাবে উঠবে ততই বেশী তাড়াতাড়ি বাড়বে। এই ব্যাপারটাকেই যদি অংকের ভাষায় লিখে প্রমাণ করতে চাও, তবে প্রধান হাতিয়ার হবে mean value theorem. নীচের অংকটা এরকম একটা উদাহরণ।

Example 61: Let $f(x)$ be a differentiable function in $[2,7]$. If $f(2)=3$ and $f'(x) \le 5$ for all x in $(2,7)$, then the maximum possible value of $f(x)$ at $x=7$ is

(A) 7 (B) 15 (C) 28 (D) 14

(JEE2014.36)

SOLUTION: সহজ বুদ্ধিতে এইভাবে এগোনো যায়-- আমরা চাইছি $f(7)$ যতটা সম্ভব বড় হোক। সেটা হবে যখন $f(x)$-টা যথাসম্ভব তাড়াতাড়ি বাড়বে, মানে $f'(x)$ যথাসম্ভব বড় হবে। বলা আছে $f'(x) \le 5$, তাই $f'(x) = 5$-টাই সবচেয়ে বেশী। সেক্ষেত্রে গ্রাফটা হয়ে যাবে একটা সরলরেখা, যেটা $(2,3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার slope হল 5. এই সরলরেখাটার equation হবে

$$y - 3 = 5(x-2)$$

এখানে $x = 7$ বসালে পাবে $y = 28$. সুতরাং $f(7)$-এর পক্ষে সর্বোচ্চ value হল 28. মানে উত্তর হল (C).
এই যুক্তিটার মধ্যে কেমন একটা আন্দাজের গন্ধ আছে। আন্দাজ করা অন্যায় নয়, এবং আন্দাজটা ভুলও নয়, কিন্তু যদি কেউ একেবারে খুঁটিয়ে খুঁটিয়ে প্রমাণ করতে বলে, তবে? তাহলে Lagrange's mean value theorem কাজে লাগবে। ধরো, এমন একটা f সম্ভব যেটা প্রশ্নে দেওয়া যাবতীয় শর্ত পালন করে, কিন্তু তাও যেভাবেই হোক $f(7) > 28$ হতে পেরেছে। তাহলে mean value theorem লাগিয়ে বলতে পারি যে, $(2,7)$-এর মধ্যে এমন কোনো c আছে যাতে $f'(c) = \frac{f(7)-f(2)}{7-2}$ হবে। মানে $f'(c) = \frac{f(7)-3}{5} > \frac{28-3}{5} = 5$ হবে। কিন্তু সেটা তো প্রশ্নের শর্ত অনুযায়ী হতে পারে না! ■

এই অংকটা যদি বুঝে থাকো, তবে নীচের অংক দুটোও mean value theorem দিয়ে করতে পারবে।

Exercise 18: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ একটা differentiable function. যদি সব $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই $f'(x) > 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $a < b$ হলে $f(a) < f(b)$ হতে বাধ্য। ■

Exercise 19: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটা differentiable function. যদি সব $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই $f'(x) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(x)$ একটা constant function হতে বাধ্য। ■

এই অংকটা ভালো করে মনে রেখো, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-কে constant function দেখানোর একটা ভালো কায়দা হল তার derivative-টাকে সর্বত্র 0 দেখানো। কায়দাটা নীচের অংকটা করতে কাজে লাগবে।

Exercise 20: Let f and g be two non-decreasing differentiable functions defined on an interval (a, b) such that for each $x \in (a, b)$, $f''(x) = g(x)$ and $g''(x) = f(x)$. Suppose also that $f(x)g(x)$ is linear in x on (a, b). Show that we must have $f(x) = g(x) = 0$ for all $x \in (a, b)$. **(BStat/BMathLong.4)**
HINT:
বলে দিয়েছে $f(x)g(x)$ হল linear, মানে লেখা যায়

$$f(x)g(x) = mx + c,$$

যেখানে m আর c যে কোনো দুটো সংখ্যা।
দ্যাখো তো এর দুই পাশকে দুবার differentiate করে কী পাও।
অংকটায় $f(x)$ আর $g(x)$-এর second derivative নিয়ে দুটো শর্ত আছে। Differentiate করে যা পেয়েছ, সেখানে এই শর্তদুটো লাগালে আসা উচিত

$$f(x)^2 + 2f'(x)g'(x) + g(x)^2 = 0.$$

এর মধ্যে প্রথম আর শেষ term-দুটো ≥ 0, কারণ square আছে। ওদিকে বলেছে f আর g দুজনেই non-decreasing. তাহলে $f'(x) \geq 0$ এবং $g'(x) \geq 0$. এবার দ্যাখো তো এ থেকে সিদ্ধান্ত করতে পারছ কিনা যে, $f'(x) = 0$ আর $g'(x) = 0$.
■

Example 62: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function satisfying

$$|f(x + y) - f(x - y) - y| \leq y^2$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$. Show that $f(x) = \frac{x}{2} + c$, where c is a constant. **(Bstat/Bmath2013long3)**
SOLUTION: আমরা দেখাব যে, $f(x) - \frac{x}{2}$ একটা constant function হবে। ধরো, $f(x) - \frac{x}{2}$-এর নাম দিলাম $g(x)$.

✎Let $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$ for $x \in \mathbb{R}$.

তাহলে $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হল একটা function. একে constant দেখানোর জন্য এটা দেখাতে পারলেই হবে যে, যে কোনো $a \in \mathbb{R}$-এর জন্যই $g'(a) = 0$.

✎Shall show that for all $a \in \mathbb{R}$ we have $g'(a) = 0$.

দেখানোর জন্য যে কোনো একটা $a \in \mathbb{R}$ নিয়ে শুরু করি--

✎Take any $a \in \mathbb{R}$.

লক্ষ করো, f-কে g দিয়ে লেখা যায় এইভাবে--

✎Now $f(x) = g(x) + \frac{x}{2}$.

সুতরাং যে শর্তটা দিয়েছে, সেটাকে g দিয়ে লেখা যায়--

✎Given that for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$\left|g(x+y) + \frac{x+y}{2} - g(x-y) - \frac{x-y}{2} - y\right| \leq y^2,$$

or

$$|g(x+y) - g(x-y)| \leq y^2.$$

এখান থেকে দেখাব যে, $g'(a) = 0$. মনে রেখো, এখানে কিন্তু এটুকুও বলে দেয় নি যে, g-টা differentiable কিনা। সেটাও আমাদেরই দেখাতে হবে। মানে আমাদের দেখাতে হবে--যেকোনো $a \in \mathbb{R}$-এর জন্যই $\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = 0$. আমাদের শর্তে $g(x+y) - g(x-y)$ আছে। এটাকে $g(a+h) - g(a)$ আকারে লিখে নিতে পারলে সুবিধা হবে। তাই এমনভাবে x, y নেব যাতে $a = x - y$ আর $a + h = x + y$ হয়। একটু রাফে কষলেই দেখবে x আর y-কে নিতে হবে এইভাবে, $x = a + \frac{h}{2}$ এবং $y = \frac{h}{2}$. তাই আমাদের শর্তটা দাঁড়াচ্ছে--

✎Taking $x = a + \frac{h}{2}$ and $y = \frac{h}{2}$, we have

$$|g(a+h) - g(a)| \leq \frac{h^2}{4}.$$

So, for $h \neq 0$,

$$\left|\frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right| \leq \frac{|h|}{4}.$$

এখানে $|h|$ কেন এল? কারণ আমরা $|h|$ দিয়ে ভাগ করেছি। যেহেতু h-টা positive নাকি negative জানা নেই, তাই h দিয়ে ভাগ করলে $\leq$-টা উল্টে যেতে পারে। কিন্তু $|h| > 0$, তাই ওটা দিয়ে ভাগ করলে $\leq$-টা ওল্টাবে না।

✎Taking limit as $h \to 0$, we get $g'(a) = 0$ by sandwich law.

এখানে sandwich law কী করে লাগছে, বুঝেছ তো? আমরা দেখলাম যে $\left|\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right| \leq \frac{|h|}{4}$. এটাকে এইভাবেও ভাবা যায়--

$$-\frac{|h|}{4} \leq \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \leq \frac{|h|}{4}.$$

আমরা জানি যে, $h \to 0$ হলে $\frac{|h|}{4} \to 0$ এবং $-\frac{|h|}{4} \to 0$ হবে। এরাই হল sandwich-এর দুপাশের পাঁউরুটি দুটো। এদের মাঝে পড়ে $\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \to 0$ হতে বাধ্য।

✎Thus, for all $a \in \mathbb{R}$, we have $g'(a) = 0$.
Hence $g(x)$ must be a constant function, ie, $g(x) = c$ for some constant c.

ব্যস্, হয়েই গেল, $g(x)$ মানে তো আসলে $f(x) - \frac{x}{2}$, অতএব--

✎$\therefore f(x) = \frac{x}{2} + c$, as required.

■

Answers

1. f_1-এর বেলায় left hand limit বড়, f_2, f_4-এর বেলায় right hand limit বড়। f_3-এর বেলায় সমান।
2. Limit-টা হল সেই লোপাট বিন্দুটার উচ্চতা, মানে $x^2 + ax + a^2$-এ $x = a$ বসালে যা হয়। সেটা হল $3a^2$.
4. $\infty, \infty, -\infty, \infty$. **5.** 1. **6.** (*i*) 0. (*ii*) 5. (*iii*) $-\infty$. (*iv*) ∞. (*v*) undefined, কারণ $\sin x$ ঢেউয়ের মত ওঠানামা করতেই থাকে। **7.** (*i*) undefined. (*ii*) ∞. (*iii*) undefined. (*iv*) $-\infty$. **8.** (A). **9.** (D).
10. (A). **11.** (B). **12.** (*i*) e^{3x}-এর মধ্যে যাবতীয় x^n আছে, যেখানে $n = 0, 1, 2, ...$ (*ii*) $e^{\sqrt{x}}$-এর মধ্যে x-এর এইসব power-গুলো আছে, $x^{n/2}$, যেখানে $n = 0, 1, 2, ...$ **13.** (B). **14.** (B). **15.** খালি $x = 0, 1$-এ।
16. (A). **17.** (D). **18.** নইলে এমন $a < b$ পেতে যেখানে $f(a) > f(b)$ হয়েছে। MVT লাগালে এমন $c \in (a, b)$ পেয়ে যাবে যেখানে $f'(c) < 0$ হবে, যেটা প্রশ্নের শর্ত অনুযায়ী অসম্ভব। **19.** না হলে, এমন $a < b$ পাবে, যাতে $f(a) \neq f(b)$ হয়। অমনি MVT থেকে এমন $c \in (a, b)$ পাবে যেখানে $f'(c) \neq 0$ হবে, যেটা অসম্ভব।
20. এখানে $f(x)^2, g(x)^2$ আর $2f'(x)g'(x)$ সকলেই ≥ 0, অথচ ওদের যোগফল 0. সেটা একমাত্র একভাবেই হতে পারে, যদি ওরা প্রত্যেকেই আলাদা করে 0 হয়।

Index